Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
27.04.2009

2. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ungerade und gerade Funktionen)

Man beweise:

i) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische gerade Funktion, so hat die Fourier-Reihe von f die Gestalt

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

ii) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische ungerade Funktion, so hat die Fourier-Reihe von f die Gestalt

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

iii) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen.

Aufgabe G2 (Treppenfunktion)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $2\pi-$periodische Funktion, die durch

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \\ \frac{1}{2} & x \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist.

i) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

ii) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe $F(x)$ der Funktion f.

iii) Gegen welche Funktion konvergiert $F(x)$ punktweise?

Aufgabe G3 (Dirichlet-Kern)

Zeigen Sie, dass für den Dirichlet-Kern D_n gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx \geq \frac{4}{\pi^2} \ln n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Schätzen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx$ durch das Integral $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, du$ nach unten ab und spalten Sie dieses in n Integrationsbereiche der Länge π auf.

Hausübung

Aufgabe G4 (Reelle Fourier-Reihe)

Die Funktion f sei 2π–periodisch mit

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

i) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

ii) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe punktweise? Ist die Konvergenz auf $[-\pi,\ \pi]$ gleichmäßig?

iii) Zeigen Sie mittels gliedweiser Integration:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = \pi^3/6 - 4(1 - 1/3^3 + 1/5^3 - ...).$$

Aufgabe G5 (Einfluss der Differenzierbarkeit von f)

i) Sei f eine k-mal stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion und

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

die zugehörige Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise. Zeigen Sie, dass $c_n = \mathrm{o}(|n|^{-k})$ gilt, das heißt, dass $c_n |n|^k \to 0$ für $|n| \to \infty$ gilt.

ii) Sei f stetig und

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

die zugehörige Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise, wobei $c_0 = 0$ gelten soll. Sei

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Zeigen Sie, dass g 2π-periodisch ist, und berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\hat{g}_n$ von g.

Aufgabe G6 (komplexe Fourier-Reihe)

i) Wie hängen die Koeffizienten der Fourier-Reihe von

$$g(x) := f(x - \tau)$$

von denen der Fourier-Reihe von f ab?

ii) Wie hängen die Koeffizienten der Fourier-Reihe von

$$h(x) := f(lx), \quad l \in \mathbb{N}$$

von denen der Fourier-Reihe von f ab?