Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
20.04.2009

1. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Partialbruchzerlegung)
Bestimmen Sie folgendes Integral mittels einer Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{x+x^2}\,dx.$$

Lösung: Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung des Integranden von $\int \frac{1}{x+x^2}\,dx$ lautet

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1}.$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ A_1 &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses LGS ist $A_1 = 1$, $A_2 = -1$. Also:

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1| + c.$$

Aufgabe G2 (Unendliche Integrale)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen der Kurve

$$y = |x|e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R},$$

und ihrer Asymptote.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

gilt.
Hinweis: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

c) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert, und berechnen Sie gegebenenfalls dessen Wert unter Verwendung der Substitutionsregel.

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)/\sqrt{\sin(x)}\, dx.$$

Lösung:

a) Es gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|e^{\frac{-x^2}{2}} = 0.$$

Daher besitzt die Kurve die horizontale Asymptote $y = 0$ und der Flächeninhalt der Fläche zwischen der Kurve und der Asymptote ist gleich

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} -xe^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + \int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 -xe^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^b \\
&= 2.
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-x^2}\, dx.$$

Wir substituieren $t = x^2$ und erhalten

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a^2} \frac{1}{2} t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^{1/2-1} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

c) Wir verwenden die *Substitution* $t = \sin(x)$ mit $dt/dx = \cos(x)$ und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \lim_{a\to 0+} \int_{\sin a}^{\sin \pi/2} 1/\sqrt{t}\, dt = \lim_{a\to 0+} 2\sqrt{t}|_{t=\sin a}^{1} = \lim_{a\to 0+} [2 - 2\sqrt{\sin(a)}] = 2.$$

Aufgabe G3 (Majorantenkriterium)

a) Zeigen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

b) Bestimmen Sie alle α, $\beta \in \mathbb{R}$, für die das folgende uneigentliche Integral konvergiert

$$\int_e^{\infty} \frac{(\log x)^{\alpha}}{x^{\beta}} dx.$$

Lösung:

a) Zuerst spaltet man das Integral in zwei Anteile. Da $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ist, existiert das Integral
$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$
Für das uneigentliche Integral über das Intervall $[1,\infty]$ erhält man durch partielle Integration
$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$
Für $b\to\infty$ geht der erste Term gegen $\cos(1)$ und der zweite konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn
$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}.$$
Übrigens: Obwohl die Sinc-Funktion keine angebbare Stammfunktion besitzt, läßt sich der Wert des uneigentlichen Integrals bestimmen. $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$

b) Für $B > e$ ergibt die Substitution $t = \log x$
$$\int_e^B \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta}dx = \int_1^{\log B} t^\alpha e^{(1-\beta)t}dt. \qquad (1)$$
Sei nun $\beta > 1$, dann gilt $\lim_{t\to\infty} t^{\alpha+2}e^{(1-\beta)t} = 0$, also existiert eine Konstante M, so dass für $t \ge 1$
$$t^\alpha e^{(1-\beta)t} \le \frac{M}{t^2}$$
gilt. Da $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ existiert, gilt dies nach dem Majorantenkriterium auch für das zu untersuchende Integral für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
Als nächstes untersuchen wir $\beta = 1$ die rechte Seite von (**??**) existiert genau dann wenn $\alpha < -1$.
Für denn Fall $\beta < 1$ bemerken wir, dass $\lim_{t\to\infty} t^\alpha e^{(1-\beta)t} = \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Also existiert das untersuche Integral in diesem Falle nicht.

Hausübung

Aufgabe H1 (Partialbruchzerlegung)
Bestimmen Sie das folgende Integral mittels einer Partialbruchzerlegung.
$$\int \frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10}\,dx.$$

Lösung: Es gilt
$$x^3 - 3x^2 + 12x - 10 = (x-1)(x^2 - 2x + 10),$$
somit hat das Nennerpolynom die reele Nullstelle 1 und die konjugierten komplexen Nullstellen $1 \pm 3i$. Die Partialbruchzerlegung
$$\frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10}$$

führt zum Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} A+B &= 5, \\ -2A-B+C &= -7, \\ 10A-C &= 20. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Koeffizienten $A=2$, $B=3$, $C=0$.
Für das zu berechnende Integral gilt also

$$I = \int \frac{5x^2-7x+20}{x^3-3x^2+12x-10}\,dx = 2\underbrace{\int \frac{1}{x+1}\,dx}_{I_1} + 3\underbrace{\int \frac{x}{x^2-2x+10}\,dx}_{I_2}.$$

Es gilt $I_1 = \ln|x-1| + C_1$. Den Nenner des zweiten Integrals formen wir zunächst um. Es gilt

$$x^2-2x+10 = 9\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1\right).$$

Substituition mit $u=\frac{x-1}{3}$ ergibt

$$I_2 = \int \frac{3u+1}{9(u^2+1)}3\,du = \frac{1}{3}\int \frac{3u+1}{u^2+1}\,du = \int \frac{u}{u^2+1}\,du + \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du.$$

Damit gilt

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \frac{1}{3}\arctan u + C$$

und nach der Rücksubstitution

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2-2x+10}{9}\right) + \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3}(x-1) + C_2.$$

Daraus folgt

$$I = 2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{x^2-2x+10}{9}\right) + \arctan\frac{1}{3}(x-1) + C.$$

Aufgabe H2 (Uneigentliches Integral)

(a) Beweisen Sie, dass das folgende Integral existiert, und berechnen Sie seinen Wert.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $y>1$ die Gleichung $\int_{1/y}^{y} \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0$ gilt.

(b) Versuchen Sie, mittels einer Reihe das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

abzuschätzen.

Lösung:

(a) Zuerst beweisen wir die Existenz des Integrals. Da $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\log x = 0$ ist, gibt es eine Konstante $M_1 > 0$ so dass
$$\frac{|\log x|}{1+x^2} \le \frac{M_1}{\sqrt{x}}$$
für alle $x \in (0,1]$. Darüberhinaus gibt es eine Konstante $M_2 > 0$, so dass
$$\frac{\log x}{1+x^2} \le \frac{M_2\sqrt{x}}{1+x^2} \le \frac{M_2}{x^{3/2}}$$
für $x \in [1,\infty)$ gilt, da $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ ist. Die Konvergenz der uneigentlichen Integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx$ impliziert die Existenz des Integrals
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx.$$
Um es zu berechnen wählen wir $y > 1$ und substituieren $x = \frac{1}{t}$. Wir bekommen
$$\int_{1/y}^y \frac{\log x}{1+x^2}dx = -\int_y^{1/y}\frac{-\log t}{(1+\frac{1}{t}^2)t^2}dt = -\int_{1/y}^y \frac{\log t}{1+t^2}dt.$$
Also gilt
$$\int_{1/y}^y \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0.$$
Das Integral $\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx$ existiert, daraus folgt
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx = \lim_{y\to\infty}\int_{1/y}^y \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0.$$
□

(b) Auf dem Intervall $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ ist $\sin^2 x \ge \frac{1}{2}$. Außerdem ist $\sin^2 x \ge 0$ und π-periodisch. Daher ist die Funktion
$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi] \text{ (für ein } k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
eine Minorante von $\sin^2$ (d.h. $\sin^2 x \ge \hat{f}(x)$). Da $\frac{1}{x}$ monoton fallend ist, ist
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3\pi}{4}+k\pi} & x \in [\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi] \text{ (für ein } k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
eine Minorante von $\frac{\sin^2 x}{x}$. Daher folgt
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \ge \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \int_{\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\frac{3\pi}{4}+k\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3\pi}{4}+k\pi}\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3\pi}{4}+k\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \frac{1}{3+4k} \ge \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} = \infty.\end{aligned}$$
Folglich divergiert das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

Aufgabe H3 (Vergleichskriterium für Reihen)

a) Es soll eine Verallgemeinerung des Satzes 10.17 aus dem Skript bewiesen werden:
Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion. Dann existiert folgender Grenzwert, und es gilt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx \right) \leq f(1).$$

b) Man zeige, dass die Folge

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log(n)$$

konvergiert.

Lösung:

a) Zunächst folgt aus $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ für alle $x \in [k, k+1]$

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1).$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion, dass die Folge

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx$$

monoton wächst und dass $0 \leq a_n \leq f(1) - f(n+1)$ ist. Damit wäre die Behauptung schon bewiesen, denn monotone beschränkte Folgen konvergieren bekanntlich! Für $n = 1$ haben wir

$$0 \leq a_1 = f(1) - \int_1^2 f(x)dx \leq a_2 - \left(f(2) - \int_2^3 f(x)dx \right) \leq a_2 \leq f(1) - f(3).$$

Nun zum Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx = a_{n+1} - \left(f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \right) \\ &\leq a_{n+1} = a_n + f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \leq f(1) - f(n+1) + f(n+1) - f(n+2) \\ &= f(1) - f(n+2). \end{aligned}$$

b) Setzen wir $f(x) := \frac{1}{x}$, so erfüllt diese Funktion f die Voraussetzungen aus dem Aufgabenteil i). Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right).$$

Außerdem gilt $\lim_{n\to\infty} (\log(n+1) - \log(n)) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(1) = 0$. Nach den Grenzwertsätzen existiert also auch der Grenzwert der zu untersuchenden Folge, und es gilt

$$\begin{aligned} C_{\text{Euler}} &:= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log(n) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right) + \lim_{n\to\infty} (\log(n+1) - \log(n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right). \end{aligned}$$

Nebenbei: Die Existenz dieses Grenzwertes $C_{\text{Euler}} = 0,5772156649...$ wurde von Euler entdeckt und besagt, dass die Partialsummen der harmonischen Reihe etwa wie $\log(n)$ wachsen. Der Grenzwert heißt *Euler-Konstante*. Es ist unbekannt, ob er rational ist oder nicht.