Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
Ch. Komo
J. Prasiswa
R. Schulz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
20.04.2009

1. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Partialbruchzerlegung)
Bestimmen Sie folgendes Integral mittels einer Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{x+x^2}\,dx.$$

Aufgabe G2 (Unendliche Integrale)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen der Kurve

$$y = |x|e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R},$$

und ihrer Asymptote.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

gilt.
Hinweis: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

c) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral existiert, und berechnen Sie gegebenenfalls dessen Wert unter Verwendung der Substitutionsregel.

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)/\sqrt{\sin(x)}\,dx.$$

Aufgabe G3 (Majorantenkriterium)

a) Zeigen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

b) Bestimmen Sie alle α, $\beta \in \mathbb{R}$, für die das folgende uneigentliche Integral konvergiert

$$\int_e^\infty \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta}dx.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Partialbruchzerlegung)

Bestimmen Sie das folgende Integral mittels einer Partialbruchzerlegung.

$$\int \frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10}\, dx.$$

Aufgabe H2 (Uneigentliches Integral)

(a) Beweisen Sie, dass das folgende Integral existiert, und berechnen Sie seinen Wert.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^2} dx.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $y > 1$ die Gleichung $\int_{1/y}^{y} \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0$ gilt.

(b) Versuchen Sie, mittels einer Reihe das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

abzuschätzen.

Aufgabe H3 (Vergleichskriterium für Reihen)

a) Es soll eine Verallgemeinerung des Satzes 10.17 aus dem Skript bewiesen werden:
Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion. Dann existiert folgender Grenzwert, und es gilt

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right) \leq f(1).$$

b) Man zeige, dass die Folge

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log(n)$$

konvergiert.