Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
15.07.2009

14. Übungsblatt „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (**Ein paar Rechenaufgaben**)

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (b)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-x^4} - \sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}.$$

2. Bestimmen Sie jeweils das Taylor Polynom vom Grad m am Entwicklungspunkt a.

$$(a)\ f(x) = e^{e^x},\ m = 3,\ a = 0 \quad (b)\ f(x) = \sin(x),\ m = 2n,\ a = \frac{\pi}{2}.$$

Finden Sie eine Abschätzung für $|f(x) - P_{m,a}(x)|$ für $x \in [a-1, a+1]$.

Aufgabe G2 (**(Taylor oder de l'Hospital?)**)
Wir definieren die Funktionen

$$\sinh :\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$
$$\cosh :\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

Zeigen Sie zunächst, das $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ gelten.

1. Berechnen Sie
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sinh x}{x \sinh x}$$
mit Hilfe der Regel von de l'Hospital.

2. Berechne
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sinh x}{x \sinh x}$$
mit Hilfe eines geeigneten Taylor-Polynoms für $\sinh x$.

Zur Erinnerung: Folgendes Taylor-Polynom mit Restglied wurde in der Vorlesung behandelt:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x),$$

wobei

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| \leq 1 + \frac{1}{2}N.$$

3. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sinh x - x^2}{x^4}$$

Aufgabe G3 (Taylorreihen)

1. Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen im Entwicklungspunkt a, ohne abzuleiten.

$$(a)\ f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)\sin(x), \quad a = 0 \qquad (b)\ g(x) = x^3 + 7x + 1, \quad a = 1.$$

2. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vorgegeben. Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ gelte

   a) $f'(x) = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

   b) $f(0) = 1$.

   Beweisen Sie mit Hilfe das Satzes von Taylor $f(x) = \exp(\alpha x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir wünschen Ihnen schöne Ferien und viel Erfolg für Ihre Prüfungen!