Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
08.07.2009

13. Übungsblatt „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Funktionen auf kompakten Mengen:)
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ beschränkt und zusammenhängend. Weiter sei $g : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Zeigen Sie, dass M kompakt ist.

b) Zeigen Sie das $g(M)$ ein abgeschlossenens Intervall ist.

Hinweis: Wiederholen Sie zunächst alle Sätze zu Stetigkeit, Kompaktheit und Zusammenhang.

Aufgabe G2 (Mittelwertsatz)
Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

$$(a)\ |e^x \sin x - e^y \sin y| \le e^{\frac{\pi}{2}} |x - y| \quad \forall x, y \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad (b)\ \tan x > x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Aufgabe G3 (Lipschitz-Stetigkeit)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie

$$\text{die 1. Ableitung } f' \text{ von } f \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow f \text{ ist global Lipschitz-stetig}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Multiple Choice) (4 Punkte)
In jeder Teilaufgabe kann die Anzahl der „ja“-Antworten 0,1 oder 2 sein.

Teilaufgaben werden einzeln wie folgt bewertet:

Für jede richtige ja/nein-Entscheidung (schreiben Sie „J“ für eine ja-Entscheidung bzw. „N“ für eine nein-Entscheidung) erhalten Sie einen Pluspunkt - für jede falsche Entscheidung einen Minuspunkt. Die Teilaufgabe wird dann mit folgender Punktzahl bewertet:

$$\max\{0, \text{Anzahl der Pluspunkte} - \text{Anzahl der Minuspunkte}\}$$

a) Seien A_k, $k \in \mathbb{N}$ kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann ist
- ☐ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls kompakt.
- ☐ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls kompakt.

b) Überprüfen Sie die folgenden Ableitungen auf ihre Richtigkeit:
- ☐ $f_1'(x) = \left[\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right]' = \frac{x}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot (1+x^2)^2}$
- ☐ $f_2'(x) = \left[x^{\ln(x)}\right]' = 2x^{\ln(x)} \cdot \frac{\ln(x)}{x}$

Aufgabe H2 (Differenzierbarkeit) (5 Punkte)
Gegeben seien folgende Funktionen:

(a) $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x > 0 \\ (x+1)^2 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sqrt[n]{|x|}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Zeigen Sie, dass die Funktionen an der Stelle 0 differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitungen an dieser Stelle.

Aufgabe H3 (Lipschitz-Stetigkeit) (6 Punkte)

(a) Zeige, daß jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ Lipschitz-stetig ist.
Hinweis: Verwende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

(c) Zeige, daß die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist.