Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Dr. B. Debrabant
D. Küpper
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

01.07.2009

Analysis 1 für M, LaG M, Phy, Übung 12

Gruppenübung

G 1 k-te Wurzeln

Bestimmen Sie alle $w \in \mathbb{C}$ mit

$$1.\ w^5 = 1, \quad 2.\ w^4 = i + 1, \quad 3.\ w^4 = -i$$

und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.

G 2 Summen über k-te Wurzeln

1. Sei $1 \neq \varepsilon \in \mathbb{C}$ mit $\varepsilon^n = 1$. Beweisen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k = 0$ und folgern Sie daraus, dass
$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi \cdot k \cdot j}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \sin \frac{2\pi \cdot k \cdot j}{n} = 0,$$
falls $0 < k < n$.

2. Beweisen Sie, dass $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   Hinweis: Es gilt $2 \cos \frac{2\pi}{5} = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$, wobei ε eine geeignete 5-te Einheitswurzel ist.

   Bemerkung: Diese Gleichheit könnte man verwenden, um ein regelmäßiges 5-Eck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

G 3 Stetigkeit

Finden Sie geeignete Definitionsbereiche für die folgenden Funktionen.

Bestimmen Sie jeweils alle Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für die sich f_i zu einer stetigen Funktion $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt.

1. $f_1(x) = \log(a|\sin x|)$

2. $f_2(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + a & \text{für } x > 1 \end{cases}$

3. $f_3(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{für } x > 0 \\ a & \text{sonst} \end{cases}$

Hausübung

H 1 Zwischenwertsatz (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton wachsende Funktion. Sei außerdem $a > 0$. Zeigen Sie, dass $g(x) = f(x) + ax$ eine Nullstelle hat und dass diese eindeutig ist.

H 2 Identitätssatz für Potenzreihen (6 Punkte)

1. Sei $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_{k+j} x^j$ den Konvergenzradius R hat.
2. Seien
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$
Potenzreihen mit jeweils positiven Konvergenzradius R_a bzw. R_b. Weiterhin gelte für alle $x \leq \min\{R_a, R_b\}$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$
Zeigen Sie, dass $a_j = b_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: 0 einsetzen, ausklammern, Induktion.

H 3 Euler'sche Formel (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Euler'schen Formel:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos(\frac{1}{2}x) - \cos((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

für alle $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.