Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Dr. B. Debrabant
D. Küpper
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24.06.2009

Analysis 1 für M, LaG M, Übung 11

Gruppenübung

G 1 Konvergenzradien von Potenzreihen

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$a)\ \sum_{k=0}^{\infty}(3+4i)^k x^k \qquad b)\ \sum_{k=0}^{\infty} k^{27} x^k \qquad c)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m+1}\right)x^k$$

G 2 Unstetige Funktionen

Konstruieren Sie zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f+g$, $f \cdot g$ und f/g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, aber f und g in keinem Punkt stetig sind.

G 3 Inverses stetiger Funktionen

Es sei $S := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ und $f : [0, 2\pi) \to S$, $t \mapsto e^{it}$. Zeigen Sie, dass f stetig und bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1} jedoch nicht stetig ist.

Hausübung

H 1 ^{V}Unstetigkeit und Konvergenzradius (6 Punkte)

Zu $q \in \mathbb{R}$ sei $R(q)$ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(q^2+1)^{k!}x^k$$

In welchen Punkten ist die Funktion $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto R(q)$ stetig?

H 2 ^{V}Alternative Definition von Stetigkeit (8 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für alle $M \subset \mathbb{R}^n$ die Inklusion $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$ gilt.

Hinweis: Mit $\overline{M}$ wird die Abschließung der Menge M bezeichnet (vgl. Vorlesung Definition 3.7)