Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Dr. B. Debrabant
D. Küpper
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17.06.2009

Analysis 1 für M, LaG M, Übung 10

Gruppenübung

G 1 Einige Beispiele

Skizzieren Sie, falls möglich, die Graphen der folgenden Funktionen. Entscheiden Sie, welche der Funktionen stetig sind. Die Antwort ist natürlich zu beweisen.

1. $f_1(x) = \frac{x}{|x|} - x$, falls $x \neq 0$, und $f_1(0) = 0$.
2. $f_2(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, falls $x \neq 1$, und $f_2(1) = 2$.
3. $f_3(x, y) = \max\{x, y\}$.

G 2 Stetigkeit

Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ lässt sich die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

stetig auf $[0, \infty)$ fortsetzen?

G 3 Nicht alle stetigen Funktionen lassen sich am Stück zeichnen

Faustregel: *Wenn man den Graph einer Funktion ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann, dann ist die Funktion stetig.*
Zeigen Sie, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

G 4 Charakteristische Funktionen

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$ eine Menge. Sei

$$\chi_A : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

die sogenannte charakteristische Funktion von A.
Zeigen Sie, dass χ_A genau dann in $x \in M$ unstetig ist, wenn $x \in \partial A$ liegt.

Hausübung

H 1 ^{V}**Stetigkeit** (7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

stetig ist. Beweisen Sie diese Aussage auf zwei verschiedene Weisen: Durch eine ε-δ-Abschätzung und durch Verwendung von konvergenten Folgen.

b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig in x ist, und für die $f(x) \neq 0$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von x gibt, so dass $f(y) \neq 0$ für jedes $y \in U$ gilt.

H 2 ^{V}**Stetigkeit** (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

1. Ist die Funktion f stetig?
2. Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F\big|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = f$?