Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Dr. B. Debrabant
D. Küpper
S. Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

04./05.06.2009

Analysis 1 für M, LaG M, Übung 8

Gruppenübung

G 1 Wurzelkriterium und Quotientenkriterium

Welche der folgenden Reihen konvergiert?

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \cdot q^n \ \text{ mit } |q| < 1; \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

G 2 Leibnizkriterium

Untersuche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz, falls

$$(a)\ a_k = \frac{2-(-1)^k}{4k}, \quad (b)\ a_k = (-1)^k \left(e - (1+\frac{1}{k})^k\right).$$

G 3 Verallgemeinerung des Leibnizkriteriums

Beweise die folgende Verallgemeinerung des Leibnizkriteriums:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, so dass eine feste Zahl $M > 0$ existiert mit

$$\left|\sum_{k=0}^{N} b_k\right| < M \quad \text{für alle} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k.$$

Folgere hieraus das gewöhnliche Leibnizkriterium.

G 4 Eine konvergente Reihe

Zeige, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ konvergiert.

Hinweis: Orientiere Dich am Beweis der Divergenz der harmonischen Reihe. Zerlege die Reihe wie folgt:

$$\underbrace{\frac{1}{1}} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}} + \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{7\sqrt{7}}} + \underbrace{\frac{1}{8\sqrt{8}} + \cdots + \frac{1}{15\sqrt{15}}} + \cdots$$

Hausübung

H 1 ^{V} **Rekursion** (6 Punkte)

Sei a_n rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 + a_n} \quad \text{für} \quad n > 0.$$

Beweise, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Hinweis: Nimm zunächst an, du hättest schon gezeigt, dass die Folge konvergiert. Dann kannst du den Grenzwert bestimmen. Zeige, dass dieser Grenzwert eine obere Schranke von (a_n) ist.

H 2 ^{V} **Einige Reihen** (6 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Reihen konvergieren und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

$$1.^S \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \quad 2. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt[k]{k}, \quad 3. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + (-\frac{1}{3})^k \right).$$

H 3 **Leibnizkriterium** (3 Punkte)

Finde eine Nullfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, die nur aus positiven reellen Zahlen besteht, und so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

nicht konvergiert.