Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
20.05.2009

6. Übungsblatt „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Gruppenübung

Aufgabe G21 (Zahlenfolgen)

Auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ verwenden wir jeweils die Metrik $d(x,y) = |x-y|$.
Gegeben seien die Folgen

(a) $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

(b) $(b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$, $b_n = i^n n$.

(c) $(c_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, $c_n = |\frac{1}{n} + i^n|^2$.

Entscheiden Sie jeweils, ob die Folge konvergiert, und begründen Sie Ihre Entscheidung anhand von Definition 3.17 aus dem Skript (ε-Kriterium). Bestimmen Sie, falls möglich, den Grenzwert.

Aufgabe G22

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass $a = 0$ ist.

(b) Es sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Beweisen Sie, dass x genau dann ein Häufungspunkt von A ist, wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x\}$ existiert mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Aufgabe G23 (Zusammengesetzte Folgen)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Wir definieren die Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ durch $b_n := a_{2n}$ und $c_n := a_{2n-1}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ beide gegen a konvergieren, dann konvergiert auch die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen a.

(b) Wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist, dann sind auch $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ konvergent.

(c) Es gibt eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, so dass die beiden Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ konvergieren, aber nicht die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$.

Aufgabe G24 (Quantoren und Konvergenz)

Betrachten Sie die folgende Aussage

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon \qquad (*)$$

für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $a \in \mathbb{R}$.

(a) Können Sie eine konvergente Folge angeben, die $(*)$ erfüllt?

(b) Können Sie eine Folge angeben, die $(*)$ erfüllt und nicht konvergiert?

Falls Sie (a) und/oder (b) positiv beantworten, geben Sie zu den Folgen auch jeweils ein ε in Abhängigkeit von a an.

(c) Geben Sie eine Folge an, die $(*)$ nicht erfüllt.

Hausübung

Aufgabe H17 (Folgen) (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen (Gegenbeispiel!) Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.

(b) Das Produkt zweier divergenter Folgen ist divergent.

(c) Wenn die Folge $(n \cdot a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, dann konvergiert auch die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$.

(d) Seien die beiden Folgen $(b_n)_{n\geq 0}$ und $(c_n)_{n\geq 0}$ bestimmt divergent gegen den uneigentlichen Grenzwert ∞ und $b_n \neq 0$ für alle $n \geq 0$, dann ist die Folge $\left(\frac{c_n}{b_n}\right)_{n\geq 0}$ beschränkt.

Aufgabe H18 (Cauchy-Folgen) (2 Punkte)

Zeigen Sie mit Definition 3.21, dass die Folge

$$a_n = \frac{1+4n^2}{2+2n^2}.$$

eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe H19 (^{V} Spezielle Folgen) (4 Punkte)

Seien $a_n, a, b_n, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $a, b \geq 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe T3 (Tutorium).

Aufgabe H20 (^{V} Konvergenz: Folgen mit Werten in $\mathbb{Z}$) (5 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a konvergiert, wenn es einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $a_n = a$ gilt für alle $n \geq N$.