Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
13.05.2009

5. Übungsblatt „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Komplexe Zahlen)

(a) Berechnen Sie

$$z_1 = (5+2i)\overline{(-1+i)}, \qquad z_2 = \frac{3i}{4-i}.$$

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{2z}{1-i} + \frac{16+2i}{i-2} = \overline{z} - 7 - 4i.$$

Geben Sie alle Ergebnisse aus (a) und (b) in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe G18 (Beweis von Satz 3.14: Abschluss, Rand und Inneres)

Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $A \subset M$ gilt:

(a) $\overline{A} = A \cup \partial A$, (b) $A^o = A \setminus \partial A$, (c) $A^o \cap \partial A = \emptyset$, (d) $A^o \cup \partial A = \overline{A}$

Aufgabe G19 (Inneres, Rand und Abschluss)

Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik. Bestimmen Sie das Innere M_i^o, den Rand ∂M_i und den Abschluss $\overline{M_i}$ der Mengen $M_1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $M_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabe G20 (Metriken)

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen $d_i : M_i \times M_i \to \mathbb{R}$ Metriken auf den Mengen M_i sind. Überlegen Sie, wie für einen beliebigen Punkt $x \in M_i$ und $\epsilon > 0$ die offene Umgebung $B_\epsilon(x) = \{y \in M_i \,|\, d_i(x, y) < \epsilon\}$ aussieht.

(a) **Diskrete Metrik:** Sei M_1 eine beliebige Menge und

$$d_1 : M_1 \times M_1 \to \mathbb{R},\ d_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

^{S}(b) **Französische Eisenbahnmetrik:** Sei $M_2 = \mathbb{R}^2$ und

$$d_2 : M_2 \times M_2 \to \mathbb{R},\ d_2(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{falls } y = t \cdot x \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei mit $\|x\|$ der euklidische Abstand von $x \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet wird.

Hausübung

Aufgabe H14 (Komplexe Zahlen) (4 Punkte)

Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - i| > 3\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = |z + 5|\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| + |z + 3| \leq 10\}$

Aufgabe H15 (^{V} Metrik) (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen die Funktion

$$d_\infty(z, w) := \max\{|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w|\}$$

eine Metrik definiert.

Zeichnen Sie die Umgebung $B_\epsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} : d_\infty(z, w) < \epsilon\}$ für $z = 1 + i$ und $\epsilon = 2$.

Aufgabe H16 (^{V} Beweis von Satz 3.15. Offene und abgeschlossene Mengen) (6 Punkte)

Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Beweisen Sie, dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen offen ist und dass der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen offen ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist und dass der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Vereinigungen abzählbar vieler abgeschlossener Mengen im Allgemeinen nicht abgeschlossen ist und dass der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen im Allgemeinen nicht offen ist.

Hinweis: Zum Erwerb des Bonus ist es nötig, dass Sie in der Übung oder im Tutorium mindestens eine Aufgabe an der Tafel vorrechnen. Übungsaufgaben, die vorgerechnet werden können, werden auf diesem und den folgenden Übungsblättern mit ^{V} versehen. Außerdem werden etwas schwierigere Aufgaben mit ^{S} gekennzeichnet.