Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
06.05.2009

4. Übungsblatt „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (injektiv,surjektiv,bijektiv)
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv bzw. surjektiv? Begründen sie ihre Antwort sorgfältig.

1. $f_1 : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ungerade}\} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}, \quad n \mapsto 2n.$
2. $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^4 + 8.$
3. $f_3 : \{M \subset \mathbb{R} \mid M \text{ beschränkt}\} \to \mathbb{R}, \quad M \mapsto \sup M.$

Aufgabe G14 (Mächtigkeit endlicher Mengen)
Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen sie, dass die Mengen $\{1, ..., n\}$ und $\{1, ..., m\}$ genau dann gleichmächtig sind, wenn $m = n$ ist.

Aufgabe G15 (Urbilder von Mengen)
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen sie:

(a) $f^{-1}(Y) = X$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Sind $A \subseteq Y$ und $B \subseteq Y$ disjunkt, so sind auch $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ disjunkt.

(c) f ist genau dann injektiv, wenn aus $C, D \subset X$ mit $C \cap D = \emptyset$ stets folgt $f(C) \cap f(D) = \emptyset$. Insbesondere (weil es nicht-injektive Funktionen gibt) ist das Analogon zu (b) mit Bildern statt Urbildern im Allgemeinen falsch.

(d) Ist Y ein kartesisches Produkt $Y = Y_1 \times Y_2$, $f = (f_1, f_2)$ mit den Komponenten $f_j\colon X \to Y_j$ und sind $A_1 \subseteq Y_1$ und $A_2 \subseteq Y_2$ Teilmengen, so ist

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) \;=\; f_1^{-1}(A_1) \,\cap\, f_2^{-1}(A_2)\,.$$

Aufgabe G16 (Bilder von Vereinigungen und Vereinigung von Bildern)
Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Teilmengen $A_i \subset M$. Zeigen sie:

$$f\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \bigcup_{i\geq 1} f(A_i)$$

Die entsprechende Aussage für Schnittmengen (für f injektiv) finden sie im Tutorium als Aufgabe T16(i).

Hausübung

Aufgabe H10 (Bijektionen) (2 Punkte)
Zeigen sie

1. Eine Abbildung $f : A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn eine Umkehrabbildung existiert. Das heißt, es gibt eine Abbildung $g : B \to A$ mit

$$g \circ f = id_A \quad \text{und} \quad f \circ g = id_B.$$

   Anm: Es genügt hier "$\Leftarrow$" zu zeigen, da "$\Rightarrow$" bereits in der Vorlesung bewiesen wurde (siehe 2.2.2 im Skript).

2. Sind $f : A \to B$ und $h : B \to C$ bijektiv, dann ist auch $h \circ f$ bijektiv mit

$$(h \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}.$$

Aufgabe H11 (Mächtigkeit der Potenzmenge) (2 Punkte)
Beweisen sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer n-elementigen Menge M genau 2^n Elemente hat.

Aufgabe H12 (Abbildungen zwischen endlichen Mengen) (5 Punkte)
Sei $M := \{1, ..., m\}$ und $N := \{1, ..., n\}$.

1. Wieviele Elemente enthält die Menge aller Abbildungen von M nach N?
2. Wieviele Elemente enthält die Menge aller injektiven Abbildungen von M nach N?

Aufgabe H13 (Mengen) (6 Punkte)
Es sei X eine Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen A_i. Veranschaulichen sie sich die folgenden Zusammenhänge zunächst anhand einer Skizze mit drei Mengen und beweisen sie sie dann allgemein für eine beliebige Indexmenge I.

(a)

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap X = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap X)$$

(b)

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i).$$

Es ist also $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I}(A_i)^c$, falls $A_i \subseteq X$ für alle Mengen A_i, mit $i \in I$. Diese Beziehung ist als **de Morgansche Identität** bekannt.