Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
29.04.2009

3. Übungsblatt „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Gruppenübung

Aufgabe G8 (Vollständige Induktion)

Beweise die beiden folgenden Aussagen für $n \geq 1$ durch vollständige Induktion.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$.

Aufgabe G9 (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} k.$$

Aufgabe G10 (Vollständige Induktion)

Beweise mit vollständiger Induktion: Ist $n \geq 2$ und $0 < x_k < 1$ für $1 \leq k \leq n$, dann gilt

$$1 - \sum_{k=1}^{n} x_k < \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k).$$

Hinweis: Zeigen Sie $\quad 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) < 0$.

Aufgabe G11 (Ungleichungen)

Versuchen Sie, die beiden Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ zu beweisen.

Aufgabe G12 (bewohnte Planeten)

Die offensichtliche falsche Aussage "Alle Planeten sind bewohnt" wird per Induktion wie folgt *bewiesen*:

Induktionsanfang: Die Erde ist bewohnt. $A(1)$
Induktionsschritt: Es gelte $A(n)$. Haben wir eine Menge von $n+1$ Planeten mit der Erde als Element dieser Menge, so greifen wir zwei verschiedene Teilmengen von jeweils n Planeten heraus, welche beide die Erde enthalten. Laut Induktionsvoraussetzung bestehen dann diese beiden Teilmengen aus bewohnten Planeten. Also gilt $A(n+1)$ und wir haben gezeigt, dass alle Planeten bewohnt sind.

Prüfen Sie diese Argumentation auf ihre Richtigkeit.

Hausübung

Aufgabe H7 (Vollständige Induktion und Zahlentheorie) (6 Punkte)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

(a) Für alle $n \geq 1$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar.

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Aufgabe H8 (Vollständige Induktion) (6 Punkte)

(a) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $2^n < n!$ für $n \geq n_0$?

(b) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3 - \frac{1}{2^n}$ für alle $n \geq n_0$ (n_0 wie in Teil (a)).

Aufgabe H9 (Vollständige Induktion) (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$