Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dr. Birgit Debrabant
Dominique Küpper
Stefan Löbig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2009
22.04.2009

2. Übungsblatt „Analysis 1 für Mathematik, LAG/Mathematik, Physik“

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Supremum und Infimum)

Bestimmen Sie das Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

$$A = \left(\frac{1}{2}, 2\right], \qquad B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Welches Supremum bzw. Infimum ist auch ein Maximum bzw. Minimum?

Aufgabe G6 (Supremum und Infimum)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Infimum, Supremum, Minimum und Maximum besitzen und geben Sie dies gegebenenfalls an.

(a) $A := \{2^m + n! : m, n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $C := \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : \quad (x+2)^2 + 4y^2 < 9\}$.

Aufgabe G7 (Rechenregeln Supremum)

Seien $A, B \in \mathbb{R}$ und nichtleer. Zeigen Sie

(a) $\sup\{a + b : a \in A, b \in B\} = \sup(A) + \sup(B)$,

(b) $\sup\{a - b : a \in A, b \in B\} = \sup(A) - \inf(B)$,

Hinweis: Satz 1.13. zur Charakterisierung für das Infimum einer Menge M kann analog formuliert werden für das Supremum $\bar{s}$ einer Menge M:
$\bar{s}$ ist Supremum $\Leftrightarrow$ $\bar{s}$ ist obere Schranke von M und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $m \in M$ mit $m > \bar{s} - \varepsilon$.

Hausübung

Aufgabe H4 (Rechenregel Supremum) (4 Punkte)

Sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir definieren $-A := \{-a : a \in A\}$ und $cA := \{ca : a \in A\}$ für $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\sup(-A) = -\inf A$,

(b) $\sup(cA) = c \sup A$, falls $c > 0$ ist.

Aufgabe H5 (abgeschlossenes Intervall) (5 Punkte)

Für reelle Zahlen $a \leq b$ nennen wir

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

ein abgeschlossenes Intervall mit Durchmesser (oder Länge)

$$diam([a, b]) = b - a.$$

Zeigen Sie, dass für $y, d \in \mathbb{R}$ mit $d \geq 0$ die Menge

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - y| \leq d\}$$

ein abgeschlossenes Intervall ist. Geben Sie den Durchmesser an.

Aufgabe H6 (Vollständigkeitsaxiom) (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{Q}$ nicht gilt.