Vorlesung Analysis I

Steffen Roch

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen 1

1.1 Die Körperaxiome . . . 2
1.1.1 Die Axiome der Addition . . . 2
1.1.2 Die Axiome der Multiplikation . . . 3
1.2 Die Anordnungsaxiome . . . 4
1.2.1 Das Rechnen mit Ungleichungen . . . 5
1.2.2 Der Betrag einer reellen Zahl . . . 5
1.3 Das Vollständigkeitsaxiom . . . 6
1.3.1 Das babylonische Wurzelziehen . . . 7
1.3.2 Minimum und Maximum, Infinum und Supremum . . . 8
1.3.3 Das Vollständigkeitsaxiom . . . 9
1.3.4 Die natürlichen Zahlen . . . 10
1.3.5 Die Archimedische Anordnung der reellen Zahlen . . . 13
1.4 Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche . . . 13

2 Mengen und Abbildungen 15

2.1 Mengen und Mengenoperationen . . . 15
2.1.1 Operationen mit Mengen . . . 15
2.2 Abbildungen . . . 17
2.2.1 Definitionen . . . 17
2.2.2 Die Umkehrabbildung . . . 19
2.2.3 Verknüpfung von Abbildungen . . . 20
2.3 Mächtigkeit von Mengen . . . 21

3 Metrische Räume 26

3.1 Der Euklidsche Raum $\mathbb{R}^n$ . . . 26
3.1.1 Der Abstand in $\mathbb{R}$ . . . 26
3.1.2 Der Raum $\mathbb{R}^n$ . . . 27
3.2 Der Körper der komplexen Zahlen . . . 30
3.3 Metrische Räume . . . 32
3.4 Folgen in metrischen Räumen . . . 37
3.5 Vollständige metrische Räume . . . 40

4 Zahlenfolgen 44

4.1 Rechnen mit Grenzwerten . . . 44
4.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ . . . 46
4.3 Einige spezielle Grenzwerte . . . 50
4.4 Partielle Grenzwerte . . . 53
4.5 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{C}$ . . . 54

5 Zahlenreihen **57**
5.1 Konvergenz von Reihen 57
5.2 Absolut konvergente Reihen 61
5.3 Umordnung von Reihen 65
5.4 Produkte von Reihen 68

6 Stetige Funktionen **71**
6.1 Stetige Funktionen 71
6.2 Stetige Funktionen auf oder nach $\mathbb{R}^n$ 74
6.3 Potenzreihen in $\mathbb{C}$ 80
6.4 Einige spezielle Funktionen 83
6.4.1 Die Exponentialfunktion 83
6.4.2 Die trigonometrischen Funktionen 85
6.5 Der Zwischenwertsatz 87
6.6 Monotonie und Umkehrfunktion 90
6.6.1 Die reelle Logarithmusfunktion 91
6.6.2 Zyklometrische oder Arkusfunktionen 93
6.6.3 Areafunktionen 94
6.7 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen 94
6.7.1 Kompakte Mengen 94
6.7.2 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen 97
6.8 Stetige Funktionen auf zusammenhängenden Mengen 99

7 Differentialrechnung für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen **103**
7.1 Definition der Ableitung und einfache Eigenschaften 104
7.2 Rechnen mit Ableitungen 105
7.3 Ableitungen spezieller Funktionen 108
7.3.1 Polynome und rationale Funktionen 108
7.3.2 Exponential–, Logarithmus– und Potenzfunktion 109
7.3.3 Trigonometrische Funktionen 110
7.4 Die Mittelwertsätze und der Satz von Taylor 111
7.4.1 Der Satz von Rolle 111
7.4.2 Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung 112
7.4.3 Konvexität und höhere Ableitungen 114
7.4.4 Der Satz von Taylor 116
7.4.5 Taylorreihen und Potenzreihen 118
7.5 Einige Anwendungen der Differentialrechnung 120
7.5.1 Kurvendiskussion 120
7.5.2 Bestimmung von Grenzwerten 122
7.6 Differentiation vektorwertiger Funktionen 123

8 Das Riemann–Integral **125**
8.1 Der Begriff des Riemann–Integrals 125
8.2 Darbouxsche Integrale 127
8.3 Einige Klassen Riemann–integrierbarer Funktionen 131
8.4 Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium 132
8.5 Eigenschaften des Riemann-Integrals 136
8.6 Integralungleichungen und Mittelwertsätze 137
8.7 Die Hauptsätze der Differential– und Integralrechnung 139
8.7.1 Stammfunktionen 139
8.7.2 Der (erste) Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung 140
8.7.3 Der zweite Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung 141
8.8 Integrationstechniken 141
8.8.1 Linearität 142
8.8.2 Partielle Integration 142
8.8.3 Integration durch Substitution 143
8.9 Stammfunktionen rationaler Funktionen 145
8.10 Uneigentliche Integrale 148
8.10.1 Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall 148
8.10.2 Integrale mit offenem Integrationsintervall 151
8.11 Flächeninhalte 152

9 Folgen und Reihen von Funktionen **155**
9.1 Punktweise Konvergenz 155
9.2 Gleichmäßige Konvergenz 157
9.3 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit 160
9.4 Gleichmäßige Konvergenz und Integrierbarkeit/ Differenzierbarkeit 161
9.5 Ergänzungen zu Potenzreihen 164
9.6 Fourierreihen 170
9.6.1 Periodische Funktionen 170
9.6.2 Trigonometrische Reihen 171
9.6.3 Fourierreihen 172
9.6.4 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen 173
9.6.5 Konvergenz im quadratischen Mittel 175

10 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher **180**
10.1 Lineare Abbildungen und Stetigkeit 180
10.2 Partielle Ableitungen 184
10.3 Differenzierbarkeit 188
10.4 Richtungsableitungen 194
10.5 Der Mittelwertsatz 195
10.6 Der Satz von Taylor 196
10.7 Lokale Extrema 200
10.8 Parameterabhängige Integrale 202

11 Kurvenintegrale **209**
11.1 Wege und Kurven 209
11.2 Rektifizierbare Wege und Bogenlänge 210
11.3 Wegintegrale 214
11.4 Ergänzungen zum Begriff „Zusammenhang“ 219
11.5 Stammfunktionen und Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen . 221

12 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten **226**
12.1 Der Banachsche Fixpunktsatz 226
12.2 Der Satz über die Umkehrfunktion 228
12.3 Der Satz über implizite Funktionen 233
12.4 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ 237
12.5 Extrema unter Nebenbedingungen 240

13 Das Riemann-Integral für Funktionen mehrerer Veränderlicher **245**
13.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im $\mathbb{R}^n$ 245
13.2 Integrabilitätskriterien 247
13.2.1 Charakterisierung über Darbouxsche Integrale 247
13.2.2 Charakterisierung über Nullmengen 248
13.3 Der Satz von Fubini 249
13.4 Integration über Jordan-messbaren Mengen 251
13.5 Inhalt von Ordinatenmengen 259
13.6 Integration über Normalbereiche 260
13.7 Die Substitutionsregel 263

14 Oberflächenintegrale und Integralsätze **272**
14.1 Flächen, Tangenten und Normalen 272
14.2 Flächenintegrale 276
14.3 Die Divergenz eines Vektorfeldes 281
14.4 Der Gaußsche Integralsatz im Raum 282
14.5 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene 287
14.6 Der Stokessche Integralsatz 290
14.7 Einige weitere Differential- und Integralformeln 296
14.7.1 Der Nabla-Operator 296
14.7.2 Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren 296
14.7.3 Produktregeln 297
14.7.4 Die Greenschen Formeln 297

Analysis I und II

In diesem Semester werden wir die elementare Analysis bis hin zur Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen kennenlernen. Im Mittelpunkt werden die Begriffe

Abbildung – Konvergenz – Stetigkeit – Differenzierbarkeit

stehen. Dabei werden Sie oft Dingen begegnen, die Sie aus der Schule kennen. Wir wollen uns hier bemühen, ein möglichst übersichtliches, einheitliches und allgemeines Konzept der Analysis zu finden.

Es gibt eine Vielzahl ausgezeichneter Lehrbücher zur Analysis. Ich werde mich im wesentlichen auf

- Barner/Flohr: Analysis I,
- Forster: Analysis I,
- Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1

stützen. Auch einen Blick in

- Fichtenholz: Differential– und Integralrechnung I
  (sehr klassisch, sehr viele Beispiele)
- Dieudonné: Grundzüge der modernen Analysis I
  (sehr modern und abstrakt)

kann ich ihnen empfehlen.

1 Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden das Fundament der Analysis. Es ist naheliegend, die reellen Zahlen über ihre Dezimalbruchdarstellung einzuführen, etwa

$$\pi = 3.14159\ldots .$$

Dieses Vorgehen führt jedoch rasch auf Probleme, deren Behandlung (insbesondere zu Beginn des Studiums) recht schwierig ist. Wir beschränken uns daher darauf, ein System von Axiomen zusammenzustellen, die von der Menge der reellen Zahlen erfüllt werden und auf die in allen Beweisen zurückgegriffen wird. Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$.

1.1 Die Körperaxiome

1.1.1 Die Axiome der Addition

Jedem geordneten Paar (a, b) reeller Zahlen ist eine eindeutig bestimmte Zahl c zugeordnet. Diese Zuordnung heißt *Addition*, und die Zahl c heißt *Summe* von a und b und wird mit $a + b$ bezeichnet. Dabei sind folgende Axiome erfüllt:

$(A1)$ Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $\quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad$ (Assoziativität).

$(A2)$ Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\quad a + b = b + a \quad$ (Kommutativität).

$(A3)$ Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ so, dass $a + 0 = a \quad$ für alle $\quad a \in \mathbb{R}$.

$(A4)$ Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $a + x = 0$.

Lemma 1.1 (a) *Es gibt genau eine Zahl* $0 \in \mathbb{R}$, *die* $(A3)$ *erfüllt.*
(b) *Zu jedem* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es genau ein* $x \in \mathbb{R}$, *so dass* $(A4)$ *gilt.*

Beweis (a) Seien $0_1, 0_2$ Zahlen, die $(A3)$ erfüllen. Dann ist

$$0_1 \overset{(A3)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{(A2)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{(A3)}{=} 0_2, \quad \text{also} \quad 0_1 = 0_2.$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$, und seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Zahlen, so dass jeweils gilt $a + x_1 = 0$ und $a + x_2 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &\overset{(A3)}{=} x_1 + 0 = x_1 + (a + x_2) \overset{(A1)}{=} (x_1 + a) + x_2 \overset{(A2)}{=} (a + x_1) + x_2 \\ &= 0 + x_2 \overset{(A2)}{=} x_2 + 0 \overset{(A3)}{=} x_2, \end{aligned}$$

d.h. es ist $x_1 = x_2$. ∎

Die eindeutig bestimmte Zahl 0 aus $(A3)$ heißt *Null*. Die zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existierende und eindeutig bestimmte Zahl x aus $(A4)$ heißt zu a *entgegengesetzt* und wird mit $-a$ bezeichnet.

Satz 1.2 *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$. *Dann gibt es genau ein* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $a + x = b$.

Beweis Wir müssen zeigen, dass eine solche Zahl x existiert und dass sie eindeutig bestimmt ist.

Existenz: Die Existenz einer Zahl mit bestimmten Eigenschaften kann man zeigen, indem man eine solche Zahl angibt. In unserem Fall ist dies einfach. Für $x := (-a) + b$ ist nämlich

$$a + x = a + \Big((-a) + b\Big) \overset{(A1)}{=} \Big(a + (-a)\Big) + b \overset{(A4)}{=} 0 + b \overset{(A2)}{=} b + 0 = b.$$

Eindeutigkeit: Sei x eine Zahl, für die $a + x = b$ ist. Dann ist

$$x = 0 + x = \Big((-a) + a\Big) + x = (-a) + (a + x) = (-a) + b,$$

d.h. x ist notwendigerweise gleich $(-a) + b$. ■

An Stelle von $(-a) + b$ oder $b + (-a)$ schreiben wir auch $b - a$.
Eine Menge, auf der eine Operation $+$ erklärt ist, welche den Axiomen $(A1)$ – $(A4)$ genügt, heißt *kommutative Gruppe*. Lemma 1.1 und Satz 1.2 gelten in beliebigen kommutativen Gruppen.

1.1.2 Die Axiome der Multiplikation

Jedem geordneten Paar (a, b) reeller Zahlen ist eine eindeutig bestimmte Zahl c zugeordnet. Diese Zuordnung heißt *Multiplikation*, und die Zahl c heißt das Produkt von a und b und wird mit ab bezeichnet. Dabei gelten folgende Axiome:

$(M1)$ Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a(bc) = (ab)c$ (Assoziativität).

$(M2)$ Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $ab = ba$ (Kommutativität).

$(M3)$ Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ so, dass $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

$(M4)$ Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $ax = 1$.

Lemma 1.3 (a) *Es gibt genau eine Zahl* $1 \in \mathbb{R}$, *die* $(M3)$ *erfüllt.*
(b) *Für jedes* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *gibt es genau* $x \in \mathbb{R}$ *so, dass* $(M4)$ *gilt.*

Die eindeutig bestimmte Zahl 1 aus $(M3)$ heißt *Eins*. Die zu jeder reellen Zahl $a \neq 0$ existierende und eindeutig bestimmte Zahl x aus $(M4)$ heißt zu a *invers* oder *reziprok* und wird mit $1/a$ oder a^{-1} bezeichnet.

Satz 1.4 *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $a \neq 0$. *Dann gibt es genau ein* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $ax = b$.

Die Beweise von Lemma 1.3 und Satz 1.4 verlaufen wie die von Lemma 1.1 und Satz 1.2. Die Zahl x aus Satz 1.4 ist gleich $(1/a) \cdot b$ bzw. $a^{-1}b$. Wir schreiben dafür auch b/a.
Die Menge der reellen Zahlen ungleich 0 bildet also bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe. Wir benötigen noch zwei Axiome, welche Addition und Multiplikation miteinander verknüpfen:

$(K1)$ Es ist $0 \neq 1$.

$(K2)$ Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist: $(a + b)c = ac + bc$ (Distributivität).

Dabei halten wir uns an die Vereinbarung "Punktrechnen geht vor Strichrechnen", $ac + bc$ bedeutet also $(ac) + (bc)$.

Lemma 1.5 (a) *Für alle* $a \in \mathbb{R}$ *ist* $a \cdot 0 = 0$.
(b) *Wenn* $ab = 0$, *dann ist* $a = 0$ *oder* $b = 0$.

(Zum mathematischen Sprachgebrauch: das "oder" ist *nicht* ausschließend. Wir könnten auch sagen: *wenigstens* eine der Zahlen a, b ist gleich 0.)

Beweis von Lemma 1.5 (a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$a \cdot 0 \overset{(A3)}{=} a(0+0) \overset{(K2)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Hieraus folgt mit Satz 1.2, dass $a \cdot 0 = 0$.
(b) Sei $a \neq 0$. Dann ist notwendigerweise

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Eine Menge mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$, die die Axiome $(A1)$ – $(A4)$, $(M1)$ – $(M4)$ sowie $(K1)$ und $(K2)$ erfüllen, heißt ein *Körper*.

1.2 Die Anordnungsaxiome

Auf $\mathbb{R}$ ist eine Relation $<$ erklärt, d.h. für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $a < b$ wahr oder falsch. Folgende Axiome verlangen wir:

$(O1)$ Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a \quad \text{(Trichotomie)}.$$

$(O2)$ Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $a < b$ und $b < c$, dann ist $a < c$ (Transitivität).

$(O3)$ Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$ (Monotonie bzgl. der Addition).

$(O4)$ Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $a < b$ und $0 < c$, dann $ac < bc$ (Monotonie bzgl. der Multiplikation).

Aus der Relation $<$ leiten wir einige weitere Relationen ab. So schreiben wir

$$\begin{array}{llll} a \leq b, & \text{wenn} & a < b & \text{oder} \quad a = b. \\ a > b, & \text{wenn} & b < a, & \\ a \geq b, & \text{wenn} & a > b & \text{oder} \quad a = b. \end{array}$$

Außerdem führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{lll} a \in \mathbb{R} \text{ heißt} & \textit{positiv}\text{, wenn} & a > 0. \\ & \textit{negativ}\text{, wenn} & a < 0. \\ & \textit{nicht–negativ}\text{, wenn} & a \geq 0. \end{array}$$

Schließlich führen wir für bestimmte Teilmengen von $\mathbb{R}$ Bezeichnungen ein:
Für $a < b$ sei

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall,} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall,} \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall.}
\end{aligned}$$

1.2.1 Das Rechnen mit Ungleichungen

Satz 1.6 (a) *Aus* $a < b$ *und* $c < d$ *folgt* $a + c < b + d$ *(Addition von Ungleichungen).*
(b) *Aus* $0 < a < b$ *und* $0 < c < d$ *folgt* $ac < bd$ *(Multiplikation von Ungleichungen).*

Beweis Wir überlegen uns nur Aussage (a). Aussage (b) zeigt man genauso. Aus $(O3)$ folgt $a + c < b + c$ sowie $b + c < b + d$. Mit $(O2)$ folgt $a + c < b + d$. ∎

Satz 1.7 *Aus* $a < b$ *und* $c < 0$ *folgt* $ac > bc$ *(Multiplikation mit einer negativen Zahl.)*

Beweis Aus $c < 0$ folgt durch Addition von $-c$, dass $0 < -c$. Aus $a < b$ und $0 < -c$ folgt mit Axiom $(O4)$ $a(-c) < b(-c)$. Nun ist aber

$$ac + a(-c) = a\Big(c + (-c)\Big) = a \cdot 0 = 0,$$

d.h. es ist $a(-c) = -ac$ und analog $b(-c) = -bc$. Wir erhalten also $-ac < -bc$, und nach Addition von $ac + bc$ auf beiden Seiten folgt $bc < ac$.

Folgerung 1.8 *Für* $a \neq 0$ *ist* $a^2 > 0$.

Für $a > 0$ folgt dies aus Axiom $(O4)$ und Lemma 1.5 (b). Ist $a < 0$, so wenden wir diese Begründung auf $0 < -a$ an und beachten, dass $(-a)^2 = a^2$. ∎

Folgerung 1.9 $0 < 1$.

Dies ergibt sich sofort aus $(K1)$ und Folgerung 1.8.

1.2.2 Der Betrag einer reellen Zahl

Den *Betrag* $|a|$ der reellen Zahl a erklären wir durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{wenn} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{wenn} \quad a < 0. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$, dass $a \leq |a|$ sowie $-a \leq |a|$.

Satz 1.10 *(a) Für $a \in \mathbb{R}$ ist $|a| \geq 0$, und es ist genau dann $|a| = 0$, wenn $a = 0$.*
(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|ab| = |a| \cdot |b|$.
(c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis Aussage (a) folgt sofort aus der Definition des Betrages.
(b) Wir unterscheiden die 4 Fälle

$$a \geq 0 \text{ und } b \geq 0, \quad a \geq 0 \text{ und } b < 0, \quad a < 0 \text{ und } b \geq 0, \quad a < 0 \text{ und } b < 0.$$

Wir wollen uns die Aussage am Beispiel von Fall 4 überlegen. Wegen $a < 0$ und $b < 0$ ist $0 < -a$ und $0 < -b$ und daher wegen $(O4)$ $0 < (-a)(-b)$. Nun ist $(-a)(-b) = ab$ ($\nearrow$ Übung), d.h. es ist $0 < ab$. Also ist in diesem Fall

$$|ab| = ab = (-a)(-b) = |a|\,|b|.$$

Die übrigen Fälle behandelt man entsprechend.
(c) Falls $a + b \geq 0$, so ist

$$|a + b| = a + b \overset{(O3)}{\leq} |a| + b \overset{(O3)}{\leq} |a| + |b|.$$

Ist dagegen $0 > a + b$, so ist $-a - b > 0$ und daher

$$|a + b| = |-(a + b)| = |-a - b| = -a - b.$$

Weiter ist $-a \leq |-a| = |a|$, $-b \leq |-b| = |b|$ und somit

$$|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|. \qquad \blacksquare$$

Folgerung 1.11 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b|$.*

Beweis Nach Satz 1.10 (c) ist $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$, d.h.

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog erhält man $|b| - |a| \leq |a - b|$. Dann ist aber auch

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b|. \qquad \blacksquare$$

1.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Die bisher eingeführten Axiome charakterisieren $\mathbb{R}$ noch nicht ausreichend. Sie werden z.B. auch von der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erfüllt. Die Menge der rationalen Zahlen ist aber in dem Sinn unvollständig, dass es Punkte auf der Zahlengeraden gibt, denen keine rationale Zahl entspricht. Wir benötigen daher ein weiteres Axiom, welches die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ garantiert (und $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet).

1.3.1 Das babylonische Wurzelziehen

Den folgenden Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung der Quadratwurzel aus einer Zahl $x \geq 1$ findet man auf einer altbabylonischen Gesetzestafel (um 1950 v.u.Z). Als Startwert für den Algorithmus wählt man

$$w_0 := x. \tag{1.1}$$

Ausgehend von w_0 werden neue Werte nach der Vorschrift

$$w_{n+1} := \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{x}{w_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

schrittweise berechnet. Wir werden später beweisen, dass sich die Zahlen w_n mit wachsendem n der Wurzel $\sqrt{x}$ immer weiter annähern. Zunächst begnügen wir uns damit, zwei einfache Eigenschaften der Zahlen w_n nachzuweisen.

Lemma 1.12 *Für die durch* (1.1) *und* (1.2) *definierten Zahlen* w_n *gilt:*
(a) $w_n^2 \geq x$ *für alle* n.
(b) $w_n \geq w_{n+1} > 0$ *für alle* n.

Beweis Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir zunächst, dass für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 \tag{1.3}$$

gilt. Diese Ungleichung ist äquivalent zu den Ungleichungen

$$\begin{aligned} 4ab \leq (a+b)^2 \quad &\text{bzw.} \quad 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\ &\text{bzw.} \quad 0 \leq (a-b)^2. \end{aligned}$$

Diese letzte Ungleichung ist wahr nach Folgerung 1.8. Damit ist (1.3) gezeigt. Setzen wir nun in (1.3) $a = w_n$ sowie $b = x/w_n$, so erhalten wir

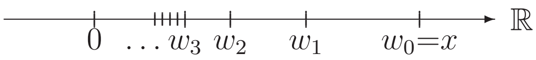
$$x \leq \frac{1}{4}\left(w_n + \frac{x}{w_n}\right)^2 = w_{n+1}^2.$$

Damit ist Aussage (a) wenigstens für alle $n \geq 1$ gezeigt. Der Fall $n = 0$, d.h. die Ungleichung $x^2 \geq x$, ist Hausaufgabe. Hieraus erhalten wir auch leicht die Behauptung (b): Zunächst sind nach Definition alle w_n positiv, und es gilt:

$$\begin{aligned} x \leq w_n^2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{x}{w_n} \leq w_n \Longrightarrow w_n + \frac{x}{w_n} \leq 2w_n \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{x}{w_n}\right) \leq w_n, \end{aligned}$$

und dies zeigt, dass $w_{n+1} \leq w_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Die Zahlen w_n werden also mit wachsendem n höchstens kleiner und verlassen den Bereich der positiven Zahlen nicht:



Die Anschauung lässt uns vermuten, dass sich die w_n der größten Zahl nähern, die kleiner oder gleich allen w_n ist. Doch **GIBT** es eine solche Zahl überhaupt? Im Bereich der rationalen Zahlen werden wir eine solche Zahl im allgemeinen **NICHT** finden. Diese Zahl ist nämlich (wie wir später sehen werden) gleich $\sqrt{x}$. Wie wir bereits wissen, ist aber z.B. für $x = 2$ die Zahl $\sqrt{x}$ nicht rational. Wir benötigen also ein Axiom, welches uns die *Existenz* der gesuchten Zahl sichert.

1.3.2 Minimum und Maximum, Infinum und Supremum

Sei M eine Teilmenge der reellen Zahlen und $s \in \mathbb{R}$. Die Zahl s heißt *obere* (bzw. *untere*) *Schranke* für M, wenn $m \leq s$ (bzw. $s \leq m$) für alle m aus M. Die Menge M heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn es eine obere (bzw. untere) Schranke für M gibt. M heißt *beschränkt*, wenn M nach oben *und* nach unten beschränkt ist.

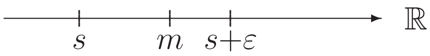
Die Zahl s heißt *Maximum* (bzw. *Minimum*) von M, wenn sie obere (bzw. untere) Schranke für M ist und wenn sie zu M gehört. Schließlich heißt s *Supremum* (bzw. *Infimum*) von M, wenn s obere (bzw. untere) Schranke für M ist und es keine kleinere obere (bzw. größere untere) Schranke für M gibt.

Maximum, Minimum, Supremum und Infimum einer Menge M sind eindeutig bestimmt (sofern solche Zahlen überhaupt existieren). Wir bezeichnen sie mit $\max M$, $\min M$, $\sup M$ und $\inf M$. Wenn das Maximum (Minimum) einer Menge existiert, so ist es zugleich das Supremum (Infimum) dieser Menge.

Beispiel Obere Schranken für das Intervall $(0, 1]$ sind z.B. $1, 2, \pi$. Die Zahl 1 ist sowohl das Maximum als auch das Supremum dieser Menge. Die Zahl 0 ist das Infimum von $(0, 1]$. Ein Minimum besitzt diese Menge nicht. ■

Der folgende Satz dient häufig zum Nachweis, dass eine bestimmte Zahl das Infimum einer gegebenen Menge ist. Ein analoger Satz gilt für das Supremum. Versuchen Sie selbst, diesen analogen Satz zu formulieren und zu beweisen.

Satz 1.13 *Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Die Zahl s ist genau dann das Infimum von M, wenn s eine untere Schranke für M ist, und wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m \in M$ existiert mit $m < s + \varepsilon$.*



Beweis Es handelt sich um eine “genau dann, wenn” Aussage. Wir müssen also zwei Implikationen beweisen.

Sei zunächst s das Infimum von M. Dann ist s nach Definition eine untere Schranke für M. Die zweite Aussage zeigen wir indirekt. Angenommen, es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, für das man kein $m \in M$ mit $m < s+\varepsilon_0$ finden kann. Dann ist offenbar $m \geq s+\varepsilon_0$ für alle $m \in M$, d.h. $s+\varepsilon_0$ ist ebenfalls eine untere Schranke für M. Diese untere Schranke ist aber größer als s. Dies ist unmöglich, da s das Infimum von M ist.

Sei nun umgekehrt s eine untere Schranke für M mit der Eigenschaft

$$\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } m \in M \text{ mit } m < s + \varepsilon. \tag{1.4}$$

Angenommen, es gäbe eine untere Schranke s' für M, die größer als s ist. Wir setzen $\varepsilon := s' - s > 0$ und schließen aus (1.4): Es gibt ein $m \in M$ so, dass

$$m < s + \varepsilon = s + (s' - s) = s'.$$

Dies steht im Widerspruch zur Annahme, s' sei untere Schranke für M. Es gibt also keine untere Schranke für M, welche größer als s ist. Somit ist s das Infimum von M. ∎

1.3.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir postulieren nun das *Vollständigkeitsaxiom*:

(V) Jede nach unten beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum.

Als erste Anwendung überlegen wir uns, dass dieses Axiom tatsächlich die Existenz der Quadratwurzel von nichtnegativen reellen Zahlen sichert.

Satz 1.14 *Sei $x \geq 1$, und die Zahlen w_n seien durch* (1.1), (1.2) *erklärt. Weiter sei $w := \inf\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $w^2 = x$.*

Beweis Sei $v := \inf\{w_n^2 : n \in \mathbb{N}\}$. Im ersten Beweisschritt überlegen wir uns, dass $w^2 = v$.
Aus $w \leq w_n$ folgt $w^2 \leq w_n^2$ und damit $w^2 \leq v$. Angenommen, es wäre $w^2 < v$. Sei $\varepsilon := \min\{1, \frac{v-w^2}{2w+1}\}$. Offenbar ist $\varepsilon > 0$, und mit diesem ε gilt:

$$(w+\varepsilon)^2 = w^2 + \varepsilon(2w+\varepsilon) \leq w^2 + \frac{v-w^2}{2w+1}(2w+1) = v,$$

es ist also $(w+\varepsilon)^2 \leq v \leq w_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits gibt es nach Definition von w und wegen Satz 1.13 ein w_n mit $w_n < w + \varepsilon$. Für dieses w_n haben wir

$$w_n^2 < (w+\varepsilon)^2 \leq w_n^2, \quad \text{ein Widerspruch.}$$

Die Annahme $w^2 < v$ ist also falsch. Folglich muss $w^2 = v$ sein. Im zweiten Beweisschritt zeigen wir, dass $v = x$. Aus Lemma 1.12 (a) wissen wir, dass $x \leq w_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $x \leq v$. Angenommen, es sei $x < v$.Wir wählen $\varepsilon = v - x$. Dann ist $\varepsilon > 0$, und nach Satz 1.13 gibt es ein w_n mit $w_n^2 < v + \varepsilon = w^2 + \varepsilon$. Für die Zahl w_{n+1} gilt dann

$$
\begin{aligned}
w^2 &\leq w_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(w_n + \frac{x}{w_n}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(w_n^2 + 2x + \frac{x^2}{w_n^2}\right) \\
&< \frac{1}{4}\left(w^2 + \varepsilon + 2x + \frac{x^2}{x}\right) \qquad \text{(wegen} \quad w_n^2 < w^2 + \varepsilon,\ x \leq w_n^2) \\
&= \frac{1}{4}\left(w^2 + 3x + \varepsilon\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(w^2 + 3x + w^2 - x\right) = \frac{1}{2}\left(w^2 + x\right) \qquad \text{(Definition von } \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Aus $w^2 < \frac{1}{2}(w^2 + x)$ folgt $w^2 < x$, was im Widerspruch zur Annahme $x < w^2$ steht. Dieser Widerspruch zeigt, dass $x = v = w^2$. ■

Damit ist zumindest für reelle Zahlen $x \geq 1$ die Existenz einer Quadratwurzel im Bereich der reellen Zahlen gezeigt. Für $0 < x < 1$ zeigt man die Existenz einer Quadratwurzel, indem man Satz 1.14 (d.h. den babylonischen Algorithmus) auf $1/x > 1$ anwendet.

Eine unmittelbare Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms ist

Folgerung 1.15 *Jede nach oben beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.*

Die Zurückführung von Folgerung 1.15 auf (V) erfolgt durch Spiegelung der Menge am Nullpunkt.

1.3.4 Die natürlichen Zahlen

Wir wollen die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen innerhalb der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen charakterisieren.

Definition 1.16 *Eine Menge M von reellen Zahlen heisst* induktiv*, wenn $0 \in M$, und wenn aus $n \in M$ auch $n + 1 \in M$ folgt.*

Beispiele für induktive Mengen sind die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen selbst oder aber die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen oder $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Klar ist, dass jede induktive Menge die Zahlen $0, 1 = 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ usw. enthält.

Lemma 1.17 *Der Durchschnitt beliebig vieler induktiver Mengen ist eine induktive Menge.*

Beweis Die Zahl 0 liegt in jeder der induktiven Mengen, also auch in deren Durchschnitt. Weiter: wenn n im Durchschnitt der induktiven Mengen liegt, so liegt n in jeder einzelnen dieser Mengen. Wegen der Induktivität liegt dann $n+1$ in jeder einzelnen dieser Mengen, also auch in deren Durchschnitt. ■

Nehmen wir also *alle* induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ und bilden deren Durchschnitt, so erhalten wir wieder eine induktive Teilmenge. Diese ist die *kleinste* induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition 1.18 *Die kleinste induktive Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *heißt* Menge der natürlichen Zahlen. *Wir bezeichnen sie mit* $\mathbb{N}$.

Mit dieser Definition erhält man sofort das *Prinzip der vollständigen Induktion*. Es sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n. Wenn wir folgendes beweisen können:

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr.

Induktionsschritt: Für jede natürliche Zahl n gilt:
Wenn $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

dann ist die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl n wahr. Um zu verstehen, warum das so ist, betrachten wir die Menge W aller natürlichen Zahlen n, für die $A(n)$ wahr ist. Im Induktionsanfang zeigen wir, dass $0 \in W$, und im Induktionsschritt, dass gilt

$$\text{wenn } n \in W, \text{ dann ist auch } n+1 \in W.$$

Also ist W eine induktive Menge. Nun ist aber W eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, und $\mathbb{N}$ ist laut Definition die kleinste induktive Menge. Deshalb kann W nicht kleiner als $\mathbb{N}$ sein. Es ist also $W = \mathbb{N}$, d.h. die Aussage $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Tritt an Stelle des Induktionsanfangs die Aussage "$A(n_0)$ ist wahr", und lässt sich der Induktionsschritt beweisen, so erhält man ganz analog die Wahrheit von $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ (zum Beweis führe man die neue Aussage $B(n) := A(n+n_0)$ ein).

Beispiel 1: *Die Summe der ersten n positiven natürlichen Zahlen.*
Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1). \qquad \left(\hat{=} A(n)\right)$$

Beweis *Induktionsanfang*: Die Aussage $A(1)$ lautet

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1}{2} 1(1+1) \quad \text{bzw.} \quad 1 = 1$$

und ist offensichtlich wahr.

Induktionsschritt: Sei $A(n)$ wahr. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

d.h. es gilt auch $A(n+1)$. Damit ist die Gültigkeit von $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ bewiesen. ■

Beispiel 2 *Die Summe der ersten $n+1$ Glieder einer geometrischen Reihe*.

Sei $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \left(\stackrel{\wedge}{=} A(n)\right).$$

Beweis *Induktionsanfang*: $A(0): \quad 1 = 1 \quad$ ist wahre Aussage.

Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}. \end{aligned}$$

■

Beispiel 3 *Die Bernoullische Ungleichung*. Sei $a > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1+a)^n \geq 1 + na. \qquad \left(\stackrel{\wedge}{=} A(n)\right).$$

Beweis *Induktionsanfang*: $A(0): \quad 1 \geq 1 \quad$ ist wahre Aussage.

Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \\ &\geq (1+na)(1+a) && \text{(hier benutzen wir } A(n)) \\ &= 1 + na + a + na^2 = 1 + a(n+1) + na^2 \\ &\geq 1 + a(n+1) && (\text{da } na^2 \geq 0). \end{aligned}$$

■

Folgerung Für $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sqrt[n]{p} - 1 \leq \frac{p-1}{n}.$$

Beweis Man setzt $a := \sqrt[n]{p} - 1$ in die Bernoullische Ungleichung ein. Einfache Umformungen ergeben die Behauptung (Hausaufgabe). ■

Zum Abschluss noch eine Aufgabe zum Knobeln und Nachdenken. Versuchen Sie, die beiden Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

und

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

für alle $n \geq 1$ mit vollständiger Induktion zu beweisen. Beachten Sie, dass die zweite Ungleichung schwächer als die erste ist.

1.3.5 Die Archimedische Anordnung der reellen Zahlen

Als zweite Konsequenz des Axioms (V) überlegen wir uns eine weitere Eigenschaft von $\mathbb{R}$ bezüglich des Relation $<$. Als Vorbereitung zeigen wir:

Lemma 1.19 *Die Menge* $\mathbb{N}$ *ist nach oben unbeschränkt.*

Beweis Wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, so würde nach Folgerung 1.15 das Supremum $\sup \mathbb{N} =: s$ existieren (beachte: $0 \in \mathbb{N}$, also ist $\mathbb{N}$ nicht leer). Nach Satz 1.13 (in der Fassung für das Supremum) gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n \leq s$. Die Zahl $n + 1$ liegt ebenfalls in $\mathbb{N}$, und für diese gilt $s < n + 1$ im Widerspruch zur Definition von s. ∎

Satz 1.20 (Archimedische Eigenschaft der Relation $<$) *Für beliebige Zahlen* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *so, dass* $an > b$.

Beweis Gäbe es keine solche Zahl n, so wäre $an \leq b$ bzw. $n \leq b/a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ wäre also nach oben beschränkt im Widerspruch zu Lemma 1.19. ∎

Es gibt Axiomensysteme der reellen Zahlen, in denen die Aussage von Satz 1.20 als *Archimedisches Axiom* gefordert wird. Die folgende Folgerung von Lemma 1.19 wird uns bei der Bestimmung von Grenzwerten wieder begegnen.

Folgerung 1.21 *Gilt für eine reelle Zahl* a, *dass* $0 \leq a < 1/n$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$, *so ist* $a = 0$.

Beweis Angenommen, $a > 0$. Aus $a < 1/n$ folgt dann $n < 1/a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in Widerspruch zur Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$ nach oben. ∎

1.4 Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche

Wir ordnen jeder reellen Zahl $x \in [0, 1)$ einen unendlichen Dezimalbruch

$$0, z_1 z_2 z_3 \ldots \quad \text{mit} \quad z_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \tag{1.5}$$

zu, wobei die Ziffern z_i wie folgt bestimmt werden:

$$
\begin{array}{lll}
z_1 & \text{ist die größte natürliche Zahl} & \leq \ 10x \\
z_2 & \text{ist die größte natürliche Zahl} & \leq \ 10^2(x - z_1 \cdot 10^{-1}) \\
z_3 & \text{ist die größte natürliche Zahl} & \leq \ 10^3(x - z_1 \cdot 10^{-1} - z_2 \cdot 10^{-2})
\end{array}
$$

usw. Für $x \geq 1$ suchen wir zunächst eine Zehnerpotenz 10^r so, dass $0 \leq \frac{x}{10^r} < 1$, bestimmen den zu $\frac{x}{10^r}$ gehörenden Dezimalbruch wie oben, und erhalten den zu x gehörenden Dezimalbruch durch Multiplikation mit 10^r. Wir werden später zeigen, dass umgekehrt jeder Dezimalbruch der Form (1.5) eine nichtnegative reelle Zahl definiert und dass die Zuordnung einer Zahl zu einem Dezimalbruch eineindeutig wird, wenn man Dezimalbrüche ausschließt, die von einer gewissen Stelle an nur noch die Ziffer 9 enthalten.

2 Mengen und Abbildungen

Einer der zentralen Begriffe der Mathematik und ihrer Anwendungen ist der Begriff der *Funktion* oder *Abbildung*. Es erweist sich für viele Probleme notwendig, Funktionen zuzulassen, die *nicht* durch analytische Ausdrücke (wie $f(x) = \sin(x^2)$) definiert sind. Wir führen daher zunächst den Begriff einer Abbildung in einer solchen Allgemeinheit ein, wie es für das Folgende zweckmäßig ist. Dazu nutzen wir die Sprache der Mengenlehre. Später spezialisieren wir uns auf reellwertige Funktionen.

2.1 Mengen und Mengenoperationen

Eine Begründung der Mengenlehre auf der Basis eines Axiomensystems ist nicht einfach, und einige damit im Zusammenhang stehende Fragen sind Gegenstand der Forschung. Wir begnügen uns mit der "naiven" Mengenlehre und vereinbaren:

> Eine *Menge* ist eine (gedankliche) Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen *Elemente* der Menge. Ist jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B, so heißt A *Teilmenge* von B (in Zeichen: $A \subseteq B$). Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Die Menge, die keine Elemente erhält, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Wir verwenden folgende Schreibweisen:

$A = \{1, 2, 3\}$	Menge mit den Elementen $1, 2$ und 3.
$A = \mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$	Menge aller reellen Zahlen x mit der Eigenschaft $x^2 < 1$.

Beispielweise ist $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\} = (-1, 1)$.

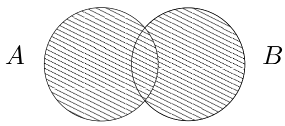
Aus der Definition folgt, dass $\emptyset \subseteq A$ und $A \subseteq A$ für jede Menge A. Außerdem ist die Relation $\subseteq$ transitiv: aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.

2.1.1 Operationen mit Mengen

Seien E und A Mengen, und für jedes $\alpha \in A$ sei E_α eine Teilmenge von E. Die Menge A dient also als "Menge von Indizes".
Unter der *Vereinigung* der Mengen E_α versteht man die Menge aller Elemente von E, die in *wenigstens einer* der Mengen E_α liegen. Als Schreibweise für diese Vereinigung benutzen wir:

- $\cup_{\alpha \in A} E_\alpha$ (allgemein)

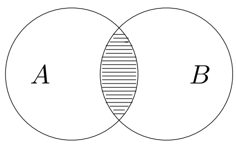
- Falls $A = \{1, 2\}$, so haben wir 2 Teilmengen E_1, E_2 von E und schreiben $E_1 \cup E_2$ statt $\cup_{\alpha\in\{1,2\}} E_\alpha$.
- Falls $A = \mathbb{N}$, schreibt man auch $\cup_{\alpha=0}^{\infty} E_\alpha$ statt $\cup_{\alpha\in\mathbb{N}} E_\alpha$.



$A \cup B$

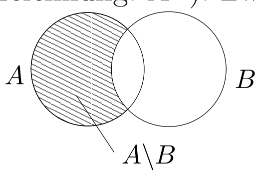
Unter dem *Durchschnitt* der Mengen E_α versteht man die Menge aller Elemente von E, die zu *jeder* der Mengen E_α gehören. Schreibweisen sind

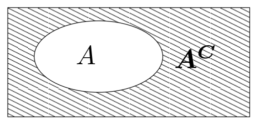
- $\cap_{\alpha\in A} E_\alpha$ (allgemein)
- Falls $A = \{1, 2\}$, schreiben wir $E_1 \cap E_2$ statt $\cap_{\alpha\in\{1,2\}} E_\alpha$.
- Falls $A = \mathbb{N}$, schreibt man auch $\cap_{\alpha=0}^{\infty} E_\alpha$ statt $\cap_{\alpha\in\mathbb{N}} E_\alpha$.



$A \cap B$

Sind A, B Teilmengen von E, so besteht die *Differenz* $A\backslash B$ aus allen Elementen von E, die in A, aber nicht in B liegen. Speziell heißt $E\backslash A$ das *Komplement* von A in E (Bezeichnung: A^C). Zwei Mengen A, B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$.

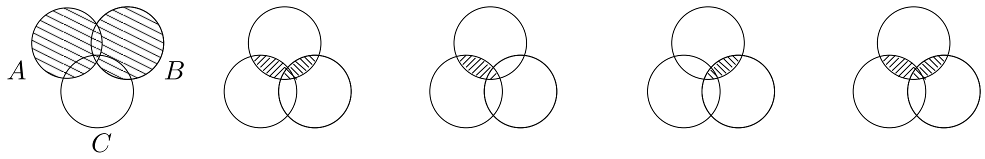




Eigenschaften des Durchschnitts und der Vereinigung

Assoziativität:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$
Kommutativität:	$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$
Distributivität:	$(\cup_{\alpha\in A} E_\alpha) \cap B = \cup_{\alpha\in A}(E_a \cap B),$
	$(\cap_{\alpha\in A} E_a) \cup B = \cap_{\alpha\in A}(E_\alpha \cup B).$

Daneben gibt es eine Vielzahl weiterer Beziehungen wie etwa $\emptyset \cup A = A$ und $\emptyset \cap A = \emptyset$ für jede Menge A. Einige davon werden Sie in der Übung kennenlernen. Als ein Beispiel wollen wir uns das Distributivgesetz $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$ klarmachen. Anschaulich lässt sich dieses Gesetz so einsehen:



$A \cup B$ $\quad$ $(A \cup B) \cap C$ $\quad$ $A \cap C$ $\quad$ $B \cap C$ $\quad$ $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Ein formaler Beweis kann so geführt werden:

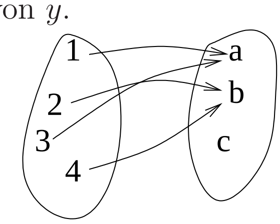
$x \in (A \cup B) \cap C$

$$
\begin{aligned}
&\iff \quad x \in A \cup B \text{ und } x \in C \\
&\iff \quad (x \text{ gehört zu } A \text{ oder } B) \text{ und } x \text{ gehört zu } C \\
&\iff \quad (x \text{ gehört zu } A \text{ und } C) \text{ oder } (x \text{ gehört zu } B \text{ und } C) \\
&\iff \quad (x \in A \cap C) \text{ oder } (x \in B \cap C) \\
&\iff \quad x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).
\end{aligned}
$$
■

2.2 Abbildungen

2.2.1 Definitionen

Seien A und B Mengen. Ist *jedem* Element x von A genau ein Element $f(x)$ aus B zugeordnet, so sagen wir, dass durch A, B und durch diese Zuordnung eine *Abbildung f von A in B* erklärt ist. Wir schreiben dann auch $f : A \to B$ oder $x \mapsto f(x)$ für $x \in A$. NICHT verwenden werden wir Ausdrücke wie "die Funktion $y = f(x)$". Für uns ist $f(x)$ immer dasjenige Element der Menge B, welches man erhält, wenn f auf x angewendet wird. Das Element $y = f(x)$ heißt das *Bild* von x, und x heißt ein *Urbild* von y.



Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt

- A der *Definitionsbereich* von f, und wir schreiben $A = D(f)$.
- die Menge $W(f) := \{y \in B : \text{es gibt ein } x \in A \text{ so, dass } y = f(x)\}$ *der Wertebereich* von f.
- für jede Teilmenge C von A die Menge

  $$f(C) := \{y \in B : \ \text{es gibt ein } \ x \in C \text{ so, dass } \ y = f(x)\}$$

  das *Bild* von C.

- für jede Teilmenge D von B die Menge

$$f^{-1}(D) := \{x \in A : f(x) \ \text{ liegt in } \ D\}$$

das *Urbild* von D.

Insbesondere ist also $f(A) = W(f)$ und $f^{-1}(B) = A = D(f)$.

Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ $\qquad W(f) = \mathbb{R}$

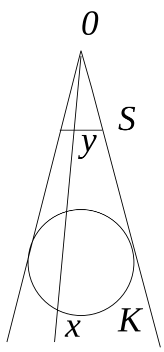
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ $\qquad W(f) = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(3) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ $\qquad W(f) = \mathbb{R}^+$

(4) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$ $\qquad W(f) = \mathbb{R}^+$

(5) $A :=$ Menge aller nichtleeren beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$
$f : A \to B,\ M \mapsto \inf M$ $\qquad W(f) = \mathbb{R}$.

(6) $A :=$ Kreis K, $\quad B :=$ Strecke S wie in der Skizze.
f ordnet dem Punkt $x \in K$ denjenigen Punkt $y \in S$ zu, der auf der Geraden durch 0 und x liegt. Dann ist $W(f) = S$.



Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- *surjektiv* oder eine *Abbildung auf*, wenn $W(f) = B$.
- *injektiv* oder *eineindeutig*, wenn jedes $y \in W(f)$ genau ein Urbild besitzt oder – mit anderen Worten – wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
- *bijektiv*, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist.

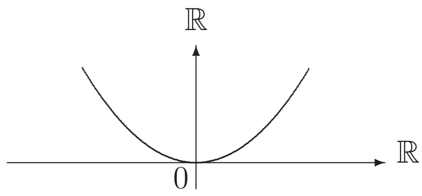
In den obigen Beispielen ist die Abbildung f in

(1) bijektiv	(2) weder surjektiv noch injektiv
(3) injektiv, nicht surjektiv	(4) bijektiv
(5) surjektiv, nicht injektiv	(6) surjektiv, nicht injektiv.

Für jede nichtleere Menge A heißt $f : A \to A, x \mapsto x$ die *identische Abbildung* von A. Sie ist offenbar bijektiv. Wir bezeichnen sie mit id_A oder nur mit id.

Seien A und B Mengen. Wir bezeichnen mit $A \times B$ die Menge aller *geordneten Paare* (a, b) von Elementen $a \in A$ und $b \in B$. Die Menge $A \times B$ heißt das *cartesische Produkt* von A und B. Beispielsweise kann man $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ mit der Menge aller Punkte der Ebene identifizieren. Im allgemeinen ist das cartesische Produkt nicht kommutativ. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so nennen wir die Menge aller geordneten Paare aus $A \times B$ von der Gestalt $(x, f(x))$ mit $x \in A$ den *Graphen* von f.

Beispiel Der Graph der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist



Jede Abbildung besitzt einen eindeutig bestimmten Graphen, und umgekehrt bestimmt ein gegebener Graph die dazugehörende Abbildung vollständig. Mitunter werden daher Abbildungen mit ihren Graphen identifiziert. Man trifft daher meist die folgende Definition des Begriffs "Abbildung", die ohne Umschreibungen wie "Zuordnung" auskommt.

Definition 2.1 *Eine* Abbildung $f : A \to B$ *ist eine Teilmenge M des Produktes $A \times B$ mit folgenden Eigenschaften:*
(a) Für jedes $a \in A$ gibt es ein $b \in B$ mit $(a, b) \in M$.
(b) Aus $(a, b_1) \in M$ und $(a, b_2) \in M$ folgt $b_1 = b_2$.

Hieraus folgt insbesondere, dass zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : A \to B$ genau dann übereinstimmen, wenn $f(x) = g(x)$ für *alle* $x \in A$.

2.2.2 Die Umkehrabbildung

Sei $f : A \to B$ bijektiv. Dann hat jedes Element von B genau ein Urbild, und wir können eine Abbildung $f^{-1} : B \to A$ definieren durch

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{genau dann, wenn} \quad f(x) = y.$$

Diese heißt die *Umkehrabbildung* von f. Man überprüft leicht, dass f^{-1} wieder bijektiv ist. Ist f bijektiv und D eine Teilmenge von B, so können wir $f^{-1}(D)$ auf zweierlei Weise verstehen: als Urbild von D bzgl. f, oder als Bild von D bzgl. f^{-1}. Beide Interpretationen bestimmen die gleiche Teilmenge von A.

In den Beispielen (1) – (6) aus 2.2.1 existiert die Umkehrabbildung nur bei (1) und (4). Im Beispiel (1) ist sie gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x,$$

und im Beispiel (4) durch

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

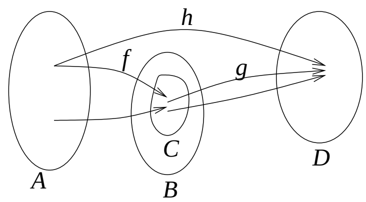
Allgemein ist für jede nichtleere Menge A die Umkehrabbildung der Abbildung id_A die Abbildung id_A selbst.

2.2.3 Verknüpfung von Abbildungen

Es seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B$ sowie $g : C \to D$ Abbildungen mit $f(A) = W(f) \subseteq C = D(g)$. Dann wird durch

$$h(x) := g\Big(f(x)\Big) \quad \text{für} \quad x \in A$$

eine Abbildung h von A in D erklärt. Diese heißt *Verknüpfung* (oder Hintereinanderausführung oder Verkettung) von f und g und wird mit $h = g \circ f$ bezeichnet. Dabei ist die Reihenfolge von f und g wesentlich. So braucht $f \circ g$ gar nicht definiert zu sein, wenn man $g \circ f$ bilden kann.



Für jede Abbildung $f : A \to B$ gilt offenbar

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \quad \mathrm{id}_B \circ f = f,$$

und für jede bijektive Abbildung $f : A \to B$ gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Satz 2.2 *Die Verknüpfung von Abbildungen ist assoziativ, d.h. sind f, g und h Abbildungen, für die $g \circ f$ und $h \circ g$ gebildet werden können, so sind auch die Abbildungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ erklärt, und es gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis Wir überlegen uns zuerst, dass sich die genannten Verknüpfungen bilden lassen. Dazu seien A, B bzw. C die Definitionsbereiche von f, g bzw. h. Nach Voraussetzung ist $f(A) \subseteq B$ und $g(B) \subseteq C$.

Der Definitionsbereich von $g \circ f$ ist A. Nun ist aber

$$(g \circ f)(A) = g\Big(f(A)\Big) \subseteq g(B) \subseteq C = D(h),$$

d.h. wir können $h \circ (g \circ f)$ bilden. Weiter: Der Definitionsbereich von $h \circ g$ ist B, und wegen $W(f) = f(A) \subseteq B$ kann man auch $(h \circ g) \circ f$ bilden. Um die Gleichheit der Abbildungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ zu zeigen, sehen wir uns ihre Wirkung auf ein willkürlich gewähltes Element $x \in A$ an:

$$\begin{aligned} \Big(h \circ (g \circ f)\Big)(x) &= h\Big((g \circ f)(x)\Big) &= h\Big(g(f(x))\Big), \\ \Big((h \circ g) \circ f\Big)(x) &= (h \circ g)\Big(f(x)\Big) &= h\Big(g(f(x))\Big). \end{aligned}$$ ■

Die Operation $\circ$ ist in der Regel auch dann nicht kommutativ, wenn beide Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert sind.

Beispiel Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. Wegen $W(f) = \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R} = D(g)$ und $W(g) = [-1, 1] \subseteq D(f)$ können sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ gebildet werden. Die Funktionen

$$(f \circ g)(x) = (\sin x)^2 \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x) = \sin(x^2)$$

sind aber voneinander verschieden. (Warum?) ■

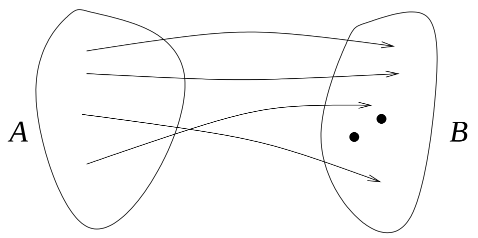
Satz 2.3 *Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f : A \to C$ bijektiv, und für die Umkehrabbildungen gilt:*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Den Beweis werden Sie in der Übung führen.

2.3 Mächtigkeit von Mengen

Wir sehen uns nun an, wie man Mengen hinsichtlich ihrer "Größe" miteinander vergleicht. Bei Mengen A, B mit endlich vielen Elementen ist das einfach. Man zählt die Elemente von A und B und betrachtet A und B als "gleich groß", wenn sie gleich viele Elemente besitzen. Eleganter noch ist das folgende Verfahren, bei dem man nicht einmal zählen können muss. Man versucht, jedem Element von A auf eineindeutige Weise ein Element B zuzuordnen. Bleiben dabei in einer der Mengen Elemente übrig, so betrachten wir diese Menge als die größere. Geht dagegen die Zuordnung auf, so betrachten wir A und B als gleich groß.



Definition 2.4 *Zwei Mengen A und B heißen* gleichmächtig *(in Zeichen: $A \cong B$), wenn es eine bijektive Abbildung von A auf B gibt.*

Satz 2.5 *Es seien A, B, C beliebige Mengen. Dann gilt*

$(a)\ A \cong A$	*(Reflexivität)*
$(b)\ A \cong B \Rightarrow B \cong A$	*(Symmetrie)*
$(c)\ A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C.$	*(Transitivität)*

Eine Relation mit den Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität heißt *Äquivalenzrelation*.

Beweis von Satz 2.5 (a) Für jede Menge A ist id_A eine Bijektion von A auf A. Also ist $A \cong A$.
(b) Sei $A \cong B$. Dann gibt es eine Bijektion f von A auf B. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist eine Bijektion von B auf A. Also ist $B \cong A$.
(c) Sei $A \cong B$ und $B \cong C$. Dann gibt es Bijektionen f von A auf B und g von B auf C. Nach Satz 2.3 ist $g \circ f$ eine Bijektion von A auf C. Also ist $A \cong C$. ■

Beispiel Die Abbildung $f : n \mapsto n^2$ ist eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf die Menge aller Quadratzahlen. Unendliche Mengen können also zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig sein. Bei endlichen Mengen ist dies unmöglich. ■

Definition 2.6 *(a) Eine Menge A heißt* endlich*, wenn $A = \emptyset$ oder wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ so gibt, dass $A \cong \{1, 2, \ldots, n\}$.*
(b) Eine Menge A heißt abzählbar*, wenn $A \cong \mathbb{N}$.*
(c) Eine Menge A heißt überabzählbar*, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.*

Mengen, die nicht endlich sind, heißen *unendlich*. Mengen, die nicht überabzählbar sind, heißen *höchstens abzählbar*. Die Abzählbarkeit einer Menge bedeutet anschaulich, dass man die Elemente diese Menge durchnumerieren kann.

Satz 2.7 *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis Wir ordnen die positiven rationalen Zahlen in ein Schema, welches uns die Numerierbarkeit erkennen lässt (Cantorsches Diagonalverfahren).

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \dots \text{ usw.,} \\
& \swarrow & & & & & &
\end{array}$$

d.h. es ist $\frac{1}{1} \mathrel{\hat{=}} a_1, \quad \frac{2}{1} \mathrel{\hat{=}} a_2, \quad \frac{1}{2} \mathrel{\hat{=}} a_3, \dots$. Offenbar kommen alle positiven rationalen Zahlen in diesem Schema vor. Gelangt man beim Durchnumerieren an eine Zahl, an die bereits eine Nummer vergeben wurde (z.B. $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = a_1$), so wird diese übersprungen. Auf diese Weise erhält man eine Bijektion von $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ auf die positiven rationalen Zahlen.

Ist nun $a_1, a_2, a_3, \dots$ die so gewonnene Durchnumerierung der positiven rationalen Zahlen, so erhält man eine Bijektion auf $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{N} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\
& & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{Q} & & 0 & a_1 & -a_1 & a_2 & -a_2 & a_3 & -a_3 & a_4 & \dots
\end{array}$$

■

Mit der gleichen Idee kann man den folgenden Satz beweisen:

Satz 2.8 *Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

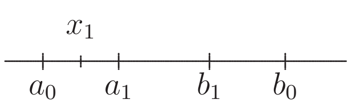
Beispielsweise ist die Menge aller Punkte der Ebene mit rationalen Koordinaten abzählbar. Gibt es überhaupt überabzählbare Mengen?

Satz 2.9 *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis Die Menge $\mathbb{R}$ ist sicher nicht endlich. Wir zeigen, dass sie auch nicht abzählbar ist. Dies tun wir indirekt, d.h. wir nehmen an, die Menge $\mathbb{R}$ könnte durchnumeriert werden:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots . \tag{2.1}$$

Wir wählen ein Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$, welches x_0 nicht enthält. Dieses unterteilen wir in drei abgeschlossene Teilintervalle, die höchstens ihre Endpunkte gemeinsam haben:



Der Punkt x_1 kann dann in höchstens zwei dieser Intervalle liegen. Sei $I_1 = [a_1, b_1]$ eines der drei Intervalle, welches den Punkt x_1 nicht enthält. Nun unterteilen wir I_1 in drei Teilintervalle und wählen daraus ein Intervall $I_2 = [a_2, b_2]$, welches x_2 nicht enthält. Eine Wiederholung dieser Überlegungen liefert uns eine Folge $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ von Intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ derart, dass $x_k \notin I_k$ für alle k.

Wir betrachten die Menge M aller rechten Endpunkte b_k dieser Intervalle. Diese Menge ist nach unten beschränkt (z.B. ist jedes a_n eine untere Schranke). Sie besitzt daher nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Infimum. Sei $s := \inf M$. Die reelle Zahl s gehört zu jedem der Intervalle I_k: Andernfalls gäbe es ja ein n so, dass $s < a_n$. Da a_n eine untere Schranke von M ist, wäre s nicht die größte untere Schranke im Widerspruch zur Definition. Die reelle Zahl s kann aber in der Aufzählung (2.1) nicht vorkommen. Wäre nämlich $s = x_n$ für ein n, so hätten wir einerseits $x_n = s \in I_n$ (soeben bewiesen) und andererseits $s = x_n \notin I_n$ (nach Konstruktion). Die Aufzählung (2.1) kann also nicht alle reellen Zahlen enthalten.
■

Der Beweis von Satz 2.9 hat das folgende wichtige Resultat mitgeliefert:

Satz 2.10 *Der Durchschnitt einer absteigenden Folge $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ abgeschlossener Intervalle ist nicht leer.*

Wir kommen hierauf noch zurück.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen Resultaten zur Konstruktion "beliebig großer Mengen". Diese Resultate benötigen wir im weiteren nicht. Sei M eine nichtleere Menge. Unser Ziel ist es, eine Menge zu konstruieren, welche eine größere Mächtigkeit als M hat. Dazu betrachten wir die Menge F aller auf M definierten Funktionen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen. Für jedes $m \in M$ sei $f^{(m)}$ die Funktion

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x = m \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und es sei F_M die Menge aller Funktionen $f^{(m)}$ mit $m \in M$. Es ist klar, dass die Abbildung $m \mapsto f^{(m)}$ eine Bijektion von M auf F_M ist. Die Menge M ist also zu einer *Teilmenge* (nämlich F_M) von F gleichmächtig. Sie ist aber *nicht zur gesamten Menge* F gleichmächtig. Wir beweisen dies indirekt. Angenommen, es gäbe eine Bijektion

$$M \to F, \quad m \mapsto f_m. \tag{2.2}$$

Dann definieren wir eine Funktion f auf M wie folgt:

$$f(m) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad f_m(m) = 0 \\ 0 & \text{falls} \quad f_m(m) = 1. \end{cases}$$

Diese Funktion liegt in F, stimmt aber mit keiner der Funktionen f_m überein. Also gibt es keine Bijektion (2.2), d.h. die Mächtigkeit von F ist größer als die von M.

Wir wollen dieses Ergebnis noch einmal anders formulieren. Dazu bezeichnen wir für jede Teilmenge A von M mit χ_A ihre *charakteristische Funktion*:

$$\chi_A(m) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad m \in A \\ 0 & \text{falls} \quad m \notin A. \end{cases}$$

Die Abbildung $A \mapsto \chi_A$ ist offenbar eine Bijektion der Menge aller Teilmengen von M (der sogenannten *Potenzmenge* von M) auf die Menge aller charakteristischen Funktionen. Letztere Menge ist aber gerade die oben eingeführte Menge F. Wir erhalten:

Satz 2.11 *Die Potenzmenge einer nichtleeren Menge M hat eine größere Mächtigkeit als die Menge M selbst.*

Mit dem soeben benutzen Verfahren, welches ebenfalls auf Cantor zurückgeht, hätten wir auch einen anderen Beweis von Satz 2.9 erbringen können. Dazu hätten wir uns genauer mit der Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen befassen müssen (was wir noch nachholen).

Mit den in diesem Abschnitt eingeführten Begriffen sind einige der berühmtesten Probleme der Mathematik verknüpft wie: Gibt es Mengen, deren Mächtigkeit zwischen der von $\mathbb{N}$ und der von $\mathbb{R}$ liegt (Kontinuumshypothese)?

3 Metrische Räume

Zahlreiche Aufgaben in der Mathematik wie auch im täglichen Leben führen auf das Problem, Abstände zu messen:

– Festlegung der Urlaubsreiseroute. Als Maß für den Abstand zweier Orte kann dienen:

  - Länge der Luftlinie
  - Länge der kürzesten Straßenverbindung
  - mindestens benötigte Zeit
  - mindestens entstehende Kosten.

– In der numerischen Mathematik kann man nur mit Objekten arbeiten, die sich durch endlich viele Zahlen beschreiben lassen. Dies ist z.B. für Polynome möglich, im allgemeinen aber nicht für beliebige (etwa stetige) Funktionen. Man möchte daher kompliziertere Funktionen durch Polynome approximieren. Um die Güte der Approximation beurteilen zu können, muss man in der Lage sein, Abstände zwischen Funktionen zu messen.

– Wir werden zum ersten Mal auf die Notwendigkeit stoßen, Abstände zu messen, wenn wir den Begriff des Grenzwertes einführen.

Mit dem Begriff des metrischen Raumes stellen wir einen Rahmen bereit, in den sich alle genannten Abstandsprobleme (und viele weitere) einbetten lassen und in dem man Begriffe wie Grenzwert oder Stetigkeit allgemein definieren kann. Wir werden nicht tief in die Theorie der metrischen Räume eindringen. Eine eingehendere Beschäftigung mit diesen (und allgemeineren) Räumen erfolgt in der Vorlesung "Funktionalanalysis".

3.1 Der Euklidsche Raum $\mathbb{R}^n$

3.1.1 Der Abstand in $\mathbb{R}$

Der Abstand zweier reeller Zahlen x, y erklären wir durch

$$d(x, y) := |x - y|.$$

Diese Definition stimmt mit unserer Anschauung überein, wenn wir uns x und y als Punkte auf der Zahlengeraden vorstellen. Für den so festgelegten Abstand gilt für beliebige Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(a) $d(x, y) \geq 0$, und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

3.1.2 Der Raum $\mathbb{R}^n$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$. Der Raum $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen geordneten n–Tupeln $x = (x_1, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen. Man kann diesen Raum identifizieren mit dem n–fachen cartesischen Produkt von $\mathbb{R}$ mit sich selbst:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \quad (n \text{ Faktoren}).$$

In $\mathbb{R}^n$ führen wir folgende Operationen ein:

Addition $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Die *Summe* zweier Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist der Vektor

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Es ist klar, dass diese Operation den Axiomen $(A1)$ – $(A4)$ genügt. Dabei übernimmt der Vektor $(0, \ldots, 0)$ die Rolle der Null, und der zu $(x_1, \ldots, x_n)$ entgegengesetzte Vektor ist $(-x_1, \ldots, -x_n)$. Der $\mathbb{R}^n$ bildet also bzgl. der Addition eine kommutative Gruppe. Insbesondere gelten Lemma 1.1 und Satz 1.2 entsprechend auch für den $\mathbb{R}^n$.

Multiplikation mit reellen Zahlen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: Das *Produkt* der reellen Zahl λ mit dem Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ wird erklärt durch

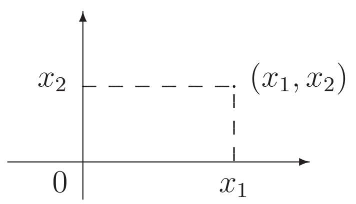
$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Man sieht sofort, dass für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

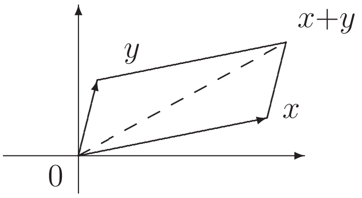
$$\begin{array}{lrcl}
(SM1) & (\lambda + \mu)x & = & \lambda x + \mu x. \\
(SM2) & \lambda(x + y) & = & \lambda x + \lambda y. \\
(SM3) & \lambda(\mu x) & = & (\lambda\mu)x. \\
(SM4) & 1 \cdot x & = & x.
\end{array}$$

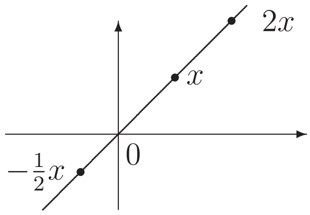
Eine Menge, auf der eine Operation + mit den Eigenschaften $(A1)$ – $(A4)$ sowie eine Multiplikation mit reellen Zahlen mit den Eigenschaften $(SM1)$ – $(SM4)$ erklärt sind, heißt *reeller linearer Raum* oder Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Der $\mathbb{R}^n$ ist also ein Beispiel für einen reellen linearen Raum.

Wir sehen uns zunächst den $\mathbb{R}^2$ etwas genauer an. Die Elemente des $\mathbb{R}^2$ kann man sich als Punkte der Ebene vorstellen:



Entsprechend hat man für die Addition bzw. Multiplikation mit Zahlen die folgende Vorstellung





Für den Abstand des Punktes $x = (x_1, x_2)$ von Nullpunkt $0 = (0, 0)$ findet man mit dem Satz des Pythagoras

$$d(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

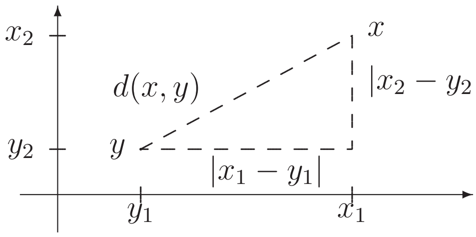
Diese Zahl heißt auch die *Norm* des Vektors x und wird mit $\|x\|$ bezeichnet. Anhand der Skizzen macht man sich klar, dass für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

- $\|x\| \geq 0$, und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Den Abstand zweier Punkte kann man ebenfalls leicht mit dem Satz des Pythagoras berechnen: Für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist

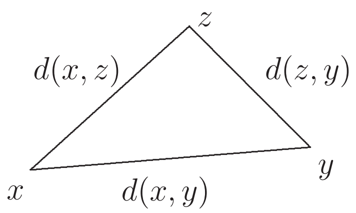
$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Wegen $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ ist $d(x, y) = \|x - y\|$. Folgende Eigenschaften des Abstands sind offensichtlich:



- $d(x, y) \geq 0$, und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Letztere Eigenschaft ist als Dreiecksungleichung bekannt.



Wir betrachten nun wieder den $\mathbb{R}^n$ mit beliebigem $n \geq 1$. Nahegelegt durch die Situation im $\mathbb{R}^2$ vereinbaren wir die folgende Definition.

Definition 3.1 *Die* Norm *eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Zahl*

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

und der Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $d(x, y) := \|x - y\|$.

Es gibt auf $\mathbb{R}^n$ weitere Normen, wie z.B.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &:= \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} && (\text{“Maximumnorm”}), \\ \|x\|_1 &:= |x_1| + \ldots + |x_n| && (\text{“Summennorm”}). \end{aligned}$$

Die in der Definition eingeführte Norm heißt die *Euklidsche Norm*. Sie wird auch mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet. Der lineare Raum $\mathbb{R}^n$, versehen mit dieser Norm, heißt der *Euklidsche Raum*.

Satz 3.2 (a) Eigenschaften der Norm*: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

- $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung).*

(b) Eigenschaften des Abstandes *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

- $d(x, y) \geq 0$, *und es ist* $d(x, y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$. *(Symmetrie)*
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *(Dreiecksungleichung)*

Zum Beweis Die ersten beiden Aussagen von (a) und (b) folgen sofort aus den Definitionen. Die Dreiecksungleichung für den Abstand folgt aus der für die Norm. Für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ist nämlich

$$\begin{aligned} d(x, y) = \|x - y\| &= \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Es verbleibt also, die Dreiecksungleichung für die Norm zu beweisen. Dies werden wir in der Übung / im Tutorium tun. ■

3.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Wir betrachten den im vorigen Abschnitt eingeführten Raum $\mathbb{R}^2$ mit der Addition und der Euklidschen Norm. Der $\mathbb{R}^2$ zeichnet sich vor den Räumen $\mathbb{R}^n, n > 2$, dadurch aus, dass sich in ihm eine Multiplikation definieren lässt, welche diesen Raum zu einem Körper macht.

Definition 3.3 *Das* Produkt *von $z = (x, y)$ und $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist erklärt durch*

$$zw = (x, y)(u, v) := (xu - yv, xv + yu) \in \mathbb{R}^2.$$

Satz 3.4 *Für das so erklärte Produkt gelten $(M1)$ – $(M4)$ und $(K1)$, $(K2)$.*

Beweis Seien $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ und $c = (a, b)$ beliebige Elemente des $\mathbb{R}^2$. Die Assoziativität der Multiplikation $(M1)$ folgt aus

$$\begin{aligned}
(zw)c &= (xu - yv, xv + yu)(a, b) \\
&= \Big((xu - yv)a - (xv + yu)b, (xu - yv)b + (xv + yu)a\Big) \\
&= \Big(x(ua - vb) - y(va + ub), x(va + ub) + y(ua - vb)\Big) \\
&= (x, y)(ua - vb, va + ub) = z(wc).
\end{aligned}$$

Die Kommutativität der Multiplikation ergibt sich sofort aus der Definition:

$$zw = (xu - yv, xy + yu) = wz.$$

Für das geordnete Paar $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$z(1, 0) = (x, y)(1, 0) = (x, y) = z \quad \text{für alle } z,$$

d.h. $(1, 0)$ ist das Einselement bezüglich der Multiplikation $(M3)$. Sei schließlich $z = (x, y) \neq (0, 0)$. Für das Paar $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ gilt:

$$(x, y)\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\Big) = \Big(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, 0\Big) = (1, 0),$$

d.h. die Gleichung $zw = (1, 0)$ ist lösbar $(M4)$. Offenbar ist auch $(1, 0) \neq (0, 0)$, d.h. $(K1)$ ist erfüllt. Schließlich rechnen wir das Distributivgesetz $(K2)$ nach:

$$\begin{aligned}
(z + w)c &= (x + u, y + v)(a, b) \\
&= \Big((x + u)a - (y + v)b, (x + u)b + (y + v)a\Big) \\
&= (xa - yb, xb + ya) + (ua - vb, ub + va) \\
&= zc + wc.
\end{aligned}$$

■

Mit den Operationen der Addition und der Multiplikation gemäß Definition 3.3 ist der $\mathbb{R}^2$ also ein Körper. Wir können mit seinen Elementen rechnen wie mit reellen Zahlen. Man bezeichnet diesen Körper mit $\mathbb{C}$ und nennt seine Elemente *komplexe Zahlen*.

Beispiel 1 Für komplexe Zahlen der speziellen Gestalt $(x, 0)$ und $(u, 0)$ gilt

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0) \quad \text{sowie} \quad (x, 0)(u, 0) = (xu, 0).$$

Beide Operationen liefern also wieder ein Element der Gestalt $(a, 0)$, und die reelle Zahl a wird wie im Reellen aus x und u berechnet. In diesem Sinn ist $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ enthalten. Genauer: Die Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ ist eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $\{(x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$, und diese Bijektion erhält die Operationen. Man schreibt daher statt $(x, 0)$ oft einfach x. ■

Beispiel 2 Für die komplexe Zahl $i := (0, 1)$ gilt:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

In $\mathbb{C}$ lässt sich also aus -1 eine Quadratwurzel ziehen! ■

Mit diesen Vereinbarungen und Bezeichnungen lässt sich eine zweckmäßige Schreibweise für komplexe Zahlen einführen

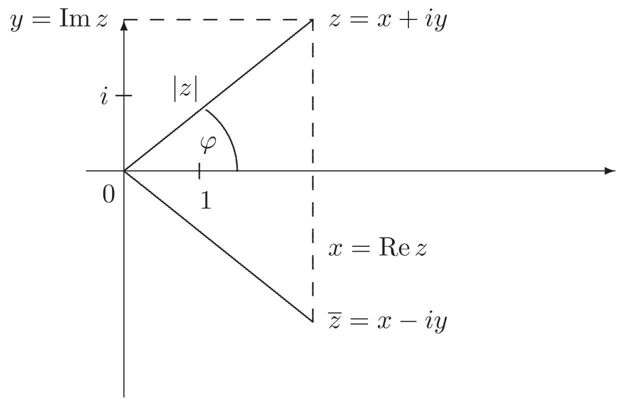
$$z = (x, y) \quad \text{schreiben wir als} \quad (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + iy.$$

Addition und Multiplikation lauten in dieser Schreibweise

$$\begin{aligned} (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v), \\ (x + iy)(u + iv) &= (xu + iyiv) + (xiv + iyu) = (xu - yv) + i(xv + yu). \end{aligned}$$

Wir führen noch einige weitere Bezeichungen ein: Für $z = x + iy$ heißt

- x der *Realteil* von z: $x = \operatorname{Re} z$,
- y der *Imaginärteil* von z: $y = \operatorname{Im} z$,
- $\sqrt{x^2 + y^2}$ *Betrag* von z: $|z|$,
- $x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe* Zahl: $\overline{z}$,
- φ das *Argument* von z: $\arg z$.



Das Argument einer komplexen Zahl z wird nur für $z \neq 0$ erklärt. Es ist eindeutig festgelegt, wenn man (z.B.) verlangt: $0^0 \leq \varphi < 360^0$.
Aus der Skizze ist auch unmittelbar klar, dass für $z \neq 0$

$$\mathrm{Re}\, z = x = |z| \cos \varphi, \quad \mathrm{Im}\, z = y = |z| \sin \varphi$$

und daher

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ist. Dies ist die sogenannte *trigonometrische Darstellung* der komplexen Zahl z. In dieser Darstellung ist das Multiplizieren und Wurzelziehen besonders einfach ($\nearrow$ Übung und Abschnitt 6.4.2). Schließlich ist der Abstand zweier komplexer Zahlen z, w gegeben durch $d(z, w) = |z - w|$.

3.3 Metrische Räume

Definition 3.5 *Es sei M eine Menge mit einer Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$, d.h. je zwei Elementen x, y von M sei eine reelle Zahl $d(x, y)$ zugeordnet. Wenn für beliebige Elemente $x, y, z \in M$ gilt:*

(a) $d(x, y) \geq 0,\ \ d(x, y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$,

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

so heißt d Abstandsfunktion *oder* Metrik *auf M, die Zahl $d(x, y)$ heißt* Abstand *der Punkte $x, y \in M$, und das Paar (M, d) heißt* metrischer Raum.

Mitunter nennt man auch M metrischen Raum (und denkt sich das d dazu).

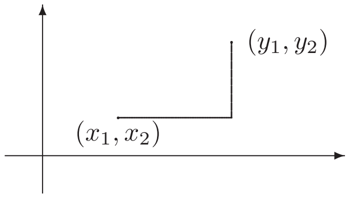
Beispiele für metrische Räume

(1) Der für uns in diesem Semester wichtigste metrische Raum ist $M = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x,y) := |x-y|$. Mit der gleichen Abstandsfunktion sind auch $M = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $[-1,1]$ metrische Räume.

(2) $M = \mathbb{C}$, $d(x,y) = |x-y|$.

(3) $M = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \|x-y\|_2 =$ Euklidscher Abstand von x und y.

(4) $M = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$ "Manhattan – Abstand".



(5) $M =$ Schachbrett, $d(x,y) :=$ Minimalzahl der Züge, die ein Turm (Dame, König, Springer) benötigt, um vom Feld x zum Feld y zu gelangen. ∎

Definition 3.6 *Es sei (M,d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und ε positiv reell. Unter der* Umgebung von x vom Radius ε *oder kurz* ε–Umgebung von x *versteht man die Menge*

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Im $\mathbb{R}^1$ ist $U_\varepsilon(x)$ das offene Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, und im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ (jeweils versehen mit dem Euklidschen Abstand) ist $U_\varepsilon(x)$ die Kreisscheibe bzw. die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius ε (jeweils ohne ihren Rand bzw. Oberfläche).

Definition 3.7 *Es sei (M,d) metrischer Raum und $A \subseteq M$.*

(*a*) *Ein Punkt $a \in A$ heißt* innerer Punkt *von A, wenn es eine Umgebung von a gibt, die ganz in A liegt.*

(*b*) *Ein Punkt $a \in M$ heißt* Randpunkt *von A, wenn in jeder Umgebung von a sowohl Punkte aus A als auch aus dem Komplement $M \backslash A$ liegen.*

(*c*) *Ein Punkt $a \in M$ heißt* Häufungspunkt *von A, wenn jede Umgebung von a einen Punkt aus A enthält, der von a verschieden ist.*

(*d*) *Ein Punkt $a \in A$ heißt* isolierter Punkt *von A, wenn a kein Häufungspunkt von A ist.*

(*e*) *Die Menge A heißt* offen, *wenn jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt von A ist.*

(*f*) *Die Menge A heißt* abgeschlossen*, wenn jeder Häufungspunkt von A zu A gehört.*

(*g*) *Die Menge aller inneren Punkte von A heißt das* Innere *von A und wird mit $A^\circ, \underline{A}$ oder* $\operatorname{int} A$ *bezeichnet.*

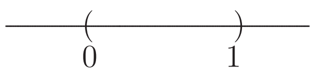
(*h*) *Die Menge aller Randpunkte von A heißt der* Rand *von A und wird mit ∂A bezeichnet.*

(*i*) *Die Vereinigung von A mit der Menge aller Häufungspunkte von A heißt die* Abschließung *von A und wird mit $\overline{A}$ oder* $\operatorname{clos} A$ *bezeichnet.*

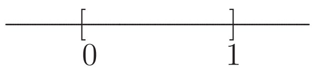
Offenbar ist stets $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, und A ist genau dann offen, wenn $A^\circ = A$, und genau dann ist A abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$.

Beispiele Als Abstand dient in den folgenden Beispielen immer $d(x, y) = |x - y|$.

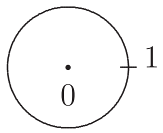
(1) $M = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$. Dann ist $A^\circ = A$, $\overline{A} = [0, 1]$, A offen, $\partial A = \{0, 1\}$.



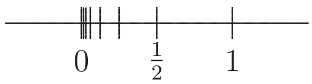
(2) $M = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$. Dann ist $A^\circ = (0, 1)$, $\overline{A} = A$, A abgeschlossen, $\partial A = \{0, 1\}$.



(3) $M = \mathbb{C}$, $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Dann ist $A^\circ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\overline{A} = A$, A abgeschlossen.



(4) $M = \mathbb{R}$, $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$.



Dann ist $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = A \cup \{0\}$, $\partial A = A \cup \{0\}$, 0 ist einziger Häufungspunkt, A ist weder offen noch abgeschlossen.

(5) $M = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$. Dann ist $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = \partial A = \mathbb{R}$, A weder offen noch abgeschlossen.

(6) $M = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$. Dann ist $A^\circ = A = \overline{A}$, $\partial A = \emptyset$, A offen und abgeschlossen.

(7) $M = \mathbb{R}$, $A = \emptyset$. Dann ist $A^\circ = A = \overline{A}$, $\partial A = \emptyset$, A offen und abgeschlossen.

(8) $M = [0, 1] \cup [2, 3]$, $A = [0, 1]$. Dann ist $A^\circ = A = \overline{A}$, $\partial A = \emptyset$, A offen und abgeschlossen.

(9) $M = \mathbb{C}$, $A = [0,1]$. Dann ist $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = A$, $\partial A = A$, A abgeschlossen. ■

Beachten Sie: Betrachtet als Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist das Intervall $[0,1]$ nicht offen. Dagegen ist $[0,1]$ offen, wenn man dieses Intervall als Teilmenge von $[0,1] \cup [2,3]$ betrachtet. Auch die Eigenschaft der Abgeschlossenheit einer Menge A hängt vom Raum M ab, in dem man A betrachtet.

Wir überlegen uns nun einige Eigenschaften offener bzw. abgeschlossener Mengen. Dabei sei stets (M,d) der zugrundeliegende metrische Raum.

Satz 3.8 *Die Mengen M und $\emptyset$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen und haben beide $\emptyset$ als ihren Rand.*

Dies folgt aus den Definitionen.

Satz 3.9 *Sei $x \in M$ und ε positive reelle Zahl. Dann ist*

(*a*) $U_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x,y) < \varepsilon\}$ *offen,*

(*b*) $K_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ *abgeschlossen.*

Die Mengen $U_\varepsilon(x)$ bzw. $K_\varepsilon(x)$ heißen auch *offene* bzw. *abgeschlossene Kugel* um x vom Radius ε.

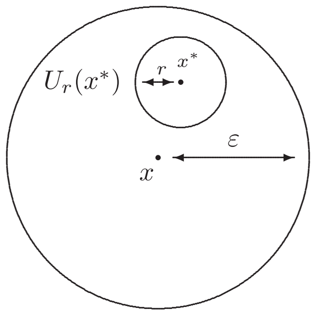
Beweis (*a*) Sei x^* ein Punkt aus $U_\varepsilon(x)$, d.h. $d(x,x^*) < \varepsilon$. Müssen zeigen: x^* ist *innerer* Punkt von $U_\varepsilon(x)$. Wählen dazu $r \in \mathbb{R}$ so, dass

$$0 < r < \varepsilon - d(x,x^*).$$

Für jeden Punkt y aus $U_r(x^*)$ ist

$$d(x,y) \leq d(x,x^*) + d(x^*,y) < d(x,x^*) + r < \varepsilon.$$

Es ist also $y \in U_\varepsilon(x)$, und da y aus $U_r(x^*)$ beliebig gewählt war, ist ganz $U_r(x^*)$ in $U_\varepsilon(x)$ enthalten.



(*b*) Sei x^* Häufungspunkt von $K_\varepsilon(x)$. Müssen zeigen, dass x^* zu $K_\varepsilon(x)$ gehört. Wir gehen indirekt vor, nehmen also an, dass $x^* \notin K_\varepsilon(x)$ bzw. $d(x,x^*) > \varepsilon$. Dann wählen wir $r \in \mathbb{R}$ so, dass $0 < r < d(x,x^*) - \varepsilon$. Für jeden Punkt $y \in U_r(x^*)$ ist

$$d(x,x^*) \leq d(x,y) + d(y,x^*) < d(x,y) + r < d(x,y) + d(x,x^*) - \varepsilon,$$

also $d(x,y) > \varepsilon$. Es liegt also *kein* Punkt von $K_\varepsilon(x)$ in $U_r(x^*)$. Andererseits *muss* jede Umgebung von x^* (also auch $U_r(x^*)$) Punkte aus $K_\varepsilon(x)$ enthalten, da ja x^* Häufungspunkt von $K_\varepsilon(x)$ ist. Widerspruch. ■

Satz 3.10 *Jede Menge, die nur ein Element enthält, ist abgeschlossen.*

Beweis Übung.

Satz 3.11 *Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann offen, wenn ihr Komplement $M \backslash A$ abgeschlossen ist.*

Beweis ($\Rightarrow$) Sei zunächst A offen und x ein Häufungspunkt von $M \backslash A$. Angenommen, x liegt in A. Dann gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$, die ganz in A liegt. In dieser Umgebung liegen keine Punkte aus $M \backslash A$. Also kann x kein Häufungspunkt von $M \backslash A$ sein. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war: x liegt also in $M \backslash A$. Da x ein beliebiger Häufungspunkt von $M \backslash A$ ist, ist $M \backslash A$ abgeschlossen.
($\Leftarrow$) Sei $M \backslash A$ abgeschlossen und $x \in A$. Da $M \backslash A$ abgeschlossen ist, ist x kein Häufungspunkt von $M \backslash A$. Es gibt daher eine Umgebung von x, die keinen Punkt aus $M \backslash A$ enthält. Diese Umgebung liegt vollständig in A. Damit ist x innerer Punkt von A, und da x beliebig aus A gewählt war, ist A offen. ■

Folgerung 3.12 *Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $M \backslash A$ offen ist.*

Satz 3.13 *Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ ist*

(*a*) *ihr Inneres A° offen,*

(*b*) *ihre Abschließung $\overline{A}$ abgeschlossen,*

(*c*) *ihr Rand ∂A abgeschlossen.*

Beweis (*a*) Sei $x \in A^\circ$. Dann gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$, die ganz in A liegt. Wir wollen zeigen, dass $U_\varepsilon(x)$ sogar in A° liegt. Dazu sei $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig. Da $U_\varepsilon(x)$ nach Satz 3.9 (*a*) offen ist, gibt es eine Umgebung $U_r(y)$, welche in $U_\varepsilon(x)$ enthalten ist. Offenbar ist $U_r(y)$ dann auch in A enthalten. Damit ist y innerer Punkt von A, also $y \in A^\circ$. Da $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig war, ist $U_\varepsilon(x) \subseteq A^\circ$. Also ist x innerer Punkt von A°, und A° offen.
(*b*) Sei x ein Häufungspunkt von $\overline{A}$. Wenn x zu A gehört, dann liegt x auch in $\overline{A}$, und wir haben nichts zu beweisen. Für das Weitere nehmen wir daher $x \notin A$ an. Sei $U_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x. Da x Häufungspunkt von $\overline{A}$ ist, liegt in $U_{\varepsilon/2}(x)$ wenigstens ein Punkt y aus $\overline{A}$. Dieser Punkt kann zu A gehören (Fall 1) oder nicht (Fall 2). Im 2. Fall ist y ein Häufungspunkt von A. In jedem Fall liegt in $U_{\varepsilon/2}(y)$ wenigstens ein Punkt $z \in A$. Für diesen gilt:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

d.h. $z \in U_\varepsilon(x)$. In jedem Fall liegt in $U_\varepsilon(x)$ wenigstens ein Punkt aus A, der von x verschieden ist (da ja $x \notin A$). Also ist x Häufungspunkt von A, d.h. insbesondere $x \in \overline{A}$. Da jeder Häufungspunkt von $\overline{A}$ zu $\overline{A}$ gehört, ist $\overline{A}$ abgeschlossen.
(c) Sei x Häufungspunkt von ∂A und $U_\varepsilon(x)$ eine beliebige Umgebung von x. Dann liegt in $U_\varepsilon(x)$ wenigstens ein Punkt $y \in \partial A$. Sei $U_r(y)$ eine Umgebung von y, die ganz in $U_\varepsilon(x)$ liegt. Da $y \in \partial A$, gibt es Punkte $z_1 \in A$ und $z_2 \in M \backslash A$, die in $U_r(y)$ und folglich auch in $U_\varepsilon(x)$ liegen. Jede Umgebung von x enthält also Punkte aus A und Punkte aus $M \backslash A$. Also ist x Randpunkt. ■

Den Beweis der beiden folgenden Aussagen sollten Sie zur Übung selbst versuchen:

Satz 3.14 *Für jede Teilmenge A von M gilt*

$$\overline{A} = A \cup \partial A, \quad A^\circ = A \backslash \partial A, \quad A^\circ \cap \partial A = \emptyset, \quad A^\circ \cup \partial A = \overline{A}.$$

Satz 3.15 (a) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*
(b) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Schließlich vereinbaren wir noch:

Definition 3.16 *Eine Menge $A \subseteq M$ heißt* beschränkt*, wenn es ein $x \in M$ und ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $A \subseteq U_\varepsilon(x)$. Die Menge A heißt* dicht *in M, wenn $\overline{A} = M$.*

Beispielsweise ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. (Warum?)

3.4 Folgen in metrischen Räumen

In diesem Abschnitt sei (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 3.17 *Eine* Folge *in M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to M$.*

Eine Folge ordnet also jeder natürlichen Zahl n ein Element $a(n)$ aus M zu. Statt $a(n)$ schreibt man meist a_n, und die Folge gibt man oft in der Form $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n \geq 0}$ oder $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ an. Oft lässt man Folgen auch erst bei $n = 1$ oder $n = n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$ beginnen.

Die folgende Definition ist eine der wichtigsten in diesem Semester.

Definition 3.18 *Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M heißt* konvergent*, wenn es ein Element $a \in M$ mit folgender Eigenschaft gibt: für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N (die von ε abhängen kann), so dass*

$$d(a, a_n) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N.$$

Es bietet sich an, an dieser Stelle die *Quantoren* $\forall$ und $\exists$ einzuführen: $\forall$ steht für "für alle", und $\exists$ für "es existiert". Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt dann: es gibt ein Element $a \in M$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad d(a, a_n) < \varepsilon.$$

Da $d(a, a_n) < \varepsilon$ gleichbedeutend mit $a_n \in U_\varepsilon(a)$ ist, können wir auch sagen:

> *Jede Umgebung von a enthält alle Glieder der Folge (a_n) mit Ausnahme höchstens endlich vieler.*

Wir werden gleich sehen, dass es für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur ein solches Element a geben kann. Dieses heißt der *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und man schreibt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*. Schließlich heißt eine Folge (a_n) *beschränkt*, wenn ihr Wertebereich (also die Menge der a_n) beschränkt ist.

Beispiele (1) Sei $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Die Folge $(a_n)_{n\geq1}$ mit $a_n = 1/n$ konvergiert gegen $a = 0$. Es ist nämlich

$$d(a, a_n) = d(0, 1/n) = |0 - 1/n| = 1/n.$$

Dies ist sicher dann kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$, wenn $n > 1/\varepsilon$. Wählen wir für N also eine natürliche Zahl mit $N > 1/\varepsilon$, so sind alle Anforderungen aus Definition 3.18 erfüllt.
(2) Sei (M, d) wie in Beispiel **(1)** und $a_n = 1/n^k$ mit $k, n \in \mathbb{N}$ und $k, n \geq 1$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\geq1}$ ebenfalls gegen 0. Um

$$d(a, a_n) = d(0, 1/n^k) = 1/n^k$$

kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ zu machen, muss $1/n^k < \varepsilon$ bzw. $n > \sqrt[k]{1/\varepsilon}$ sein. Wählen wir also $N \in \mathbb{N}$ größer als $\sqrt[k]{1/\varepsilon}$, sind die Bedingungen aus der Definition erfüllt.
(3) Sei $M = \mathbb{R}^2$ mit dem Euklidschen Abstand und $a_n = (1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2$. Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\geq1}$ gegen den Punkt $a = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert. Zunächst ist

$$d(a, a_n) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n} - 1\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{n^2} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}.$$

Natürlich könnte man versuchen, die Ungleichung $\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} < \varepsilon$ nach n umzustellen und so eine untere Schranke für N zu gewinnen. Da wir aber nicht am kleinstmöglichen N interessiert sind, schätzen wir vorher ab:

$$d(a, a_n) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \leq \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{2}{n}.$$

Um $\frac{2}{n}$ kleiner als ε zu machen, genügt es, $N > \frac{2}{\varepsilon}$ und $n \geq N$ zu wählen.
(4) Sei $M = \mathbb{C}$ mit dem Betragsabstand und $a_n = i^n$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent. Wir überlegen uns dies indirekt. Angenommen, $a \in \mathbb{C}$ ist Grenzwert von (a_n). Da diese Folge jede der Zahlen $1, i, -1, -i$ unendlich oft enthält, müsste jeder dieser Zahlen in jeder noch so kleinen Umgebung von a liegen, z.B. in $U_{\frac{1}{2}}(a)$. Nach der Dreiecksungleichung wäre dann

$$d(1,-1) \leq d(1,a) + d(a,-1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

was offenbar falsch ist. ■

Wir überlegen uns nun einige einfache Eigenschaften konvergenter Folgen.

Satz 3.19 *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis Angenommen, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $n \to \infty$ sowohl gegen a' als auch gegen a''. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es dann Zahlen N' und N'' so, dass

$$d(a', a_n) < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N' \quad \text{und} \quad d(a'', a_n) < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N''.$$

Sei $N := \max\{N', N''\}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$0 \leq d(a', a'') \leq d(a', a_n) + d(a'', a_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist also $0 \leq d(a', a'') < \varepsilon$. Nach Folgerung 1.21 ist dann $d(a', a'') = 0$, d.h. $a' = a''$. ■

Satz 3.20 *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beweis Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es eine Zahl N so, dass

$$d(a, a_n) < 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq N.$$

Wir wählen $r \in \mathbb{R}$ so, dass

$$r > \max\Big\{1, d(a, a_0), d(a, a_1), \ldots, d(a, a_{N-1})\Big\}.$$

Dann liegen alle Folgenglieder a_n in $U_r(a)$. ■

Beispielsweise ist die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ unbeschränkt und folglich divergent. Beispiel **(4)** zeigt, dass die Umkehrung von Satz 3.20 nicht gilt.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum und $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$. Dann heißt die Folge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* der Folge (a_n). Wir greifen also aus (a_n) gerade die Folgenglieder mit den Indizes k_n heraus. Für $a_n = \frac{1}{n}$ und $k_n = 2n$ ist etwa

$$(a_{k_n})_{n=1}^{\infty} = \Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\Big).$$

In der Sprache der Abbildungen können wir den Begriff "Teilfolge" auch wie folgt erklären: Sei $a : \mathbb{N} \to M$ Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend (d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $k(n) < k(n+1)$). Dann heißt $a \circ k$ eine Teilfolge von a.

Satz 3.21 *Ist (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a, so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) und hat ebenfalls den Grenzwert a.*

Dies folgt unmittelbar aus der Definition. Besitzt also eine Folge eine divergente Teilfolge, so ist sie selbst divergent.

3.5 Vollständige metrische Räume

Wollen wir die Konvergenz einer Folge mittels Definition 3.18 überprüfen, so müssen wir ihren Grenzwert bereits kennen (oder wenigstens vermuten). Man wünscht sich daher Konvergenzkriterien, die man anwenden kann, *ohne* den Grenzwert im voraus erahnen zu müssen. Wir beschreiben in diesem Abschnitt das für die Analysis nützlichste Konvergenzkriterium. Sei wieder (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 3.22 *Eine Folge (a_n) in M heißt* Fundamentalfolge *oder* Cauchy–Folge, *wenn für jedes reelle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \textit{für alle}\, n, m \geq N.$$

Satz 3.23 *Jede konvergente Folge ist eine Fundamentalfolge.*

Beweis Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N so, dass

$$d(a, a_n) < \varepsilon/2 \quad \text{für alle}\, n \geq N.$$

Für alle $m, n \geq N$ ist dann wegen der Dreiecksungleichung

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von Satz 3.23 in allgemeinen *nicht* gilt: Wir betrachten dazu die Folge des Babylonischen Wurzelziehens. Es ist also $x > 1$ und

$$w_0 := x, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(w_n + \frac{x}{w_n}\Big) \quad \text{für}\, n \geq 0.$$

Aus Abschnitt 1.3 wissen wir, dass $(w_n)_{n\geq 0}$ eine fallende Folge positiver Zahlen ist und dass für ihr Infimum $w := \inf\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt: $w = \sqrt{x}$. Wir überlegen uns nun, dass die Folge (w_n) sogar gegen w konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Satz 1.13 gibt es ein Folgenglied w_N mit

$w \le w_N < w + \varepsilon$. Da die Folge (w_n) monoton fällt und w das Infimum der w_n ist, folgt

$$w \le w_n \le w_N < w + \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Für alle $n \ge N$ ist also $d(w, w_n) = |w - w_n| < \varepsilon$. Somit ist tatsächlich $\lim w_n = w$. Die Folge (w_n) konvergiert also für jeden Startwert $w_0 \ge 1$ und ist demzufolge nach Satz 3.23 eine Fundamentalfolge in $\mathbb{R}$. Sei nun speziell $w_0 = 2$. Man überprüft leicht, dass dann alle w_n rationale Zahlen sind (z.B. mit vollständiger Induktion). Für diesen Startwert ist (w_n) also sogar eine Fundamentalfolge in $\mathbb{Q}$. Diese Folge ist aber in $\mathbb{Q}$ nicht konvergent, da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. ■

Definition 3.24 *Ein metrischer Raum* (M, d) *heißt* vollständig*, wenn in ihm jede Fundamentalfolge konvergiert.*

Wie das soeben betrachtete Beispiel zeigt, ist der Raum $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit dem Betragsabstand *nicht* vollständig. Wir werden etwas später sehen, dass die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit dem Betragsabstand und auch die Räume $\mathbb{R}^n$ mit dem Euklidschen Abstand vollständig sind. Dies ist der wesentliche Grund für die Unentbehrlichkeit der reellen Zahlen in der Analysis.

Wir sehen uns noch einige wichtige Eigenschaften vollständiger metrischer Räume an.

Satz 3.25 (Cantorscher Durchschnittssatz) *Sei* (M, d) *ein vollständiger metrischer Raum. Für die abgeschlossenen Kugeln* $K_{r_n}(x_n) := \{y \in M : d(y, x_n) \le r_n\}$ *soll gelten:*

$$K_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq K_{r_n}(x_n) \quad \textit{für alle } n \textit{ und} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Dann gibt es genau einen Punkt $x^* \in M$ *so, dass* x^* *in jeder der Kugeln* $K_{r_n}(x_n)$ *liegt.*

Beweis Wir wollen zeigen, dass der Durchschnitt $\cap_n K_{r_n}(x_n)$ genau ein Element enthält. Wir zeigen zuerst, dass dieser Durchschnitt nicht leer ist und überlegen uns dazu, dass die Folge (x_n) der Kugelmittelpunkte eine Fundamentalfolge ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $r_n \to 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$0 \le r_n < \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Seien $m, n \ge N$. Wegen der Einbettungseigenschaft gilt $x_n \in K_{r_m}(x_m)$ falls $n \ge m$ und $x_m \in K_{r_n}(x_n)$ falls $m \ge n$. In jedem Fall ist

$$d(x_n, x_m) \le \max\{r_n, r_m\} < \varepsilon.$$

Also ist (x_n) tatsächlich eine Fundamentalfolge. Da der Raum (M, d) vollständig ist, besitzt diese Folge einen Grenzwert, den wir mit x^* bezeichnen.

Wir zeigen nun, dass x^* in jeder der Kugeln $K_{r_n}(x_n)$ liegt. In $K_{r_n}(x_n)$ liegen wegen der Einbettungseigenschaft aller Glieder der Folge $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$, die nach Satz 3.21 ebenfalls gegen x^* konvergiert. Also liegt x^* in der Abschließung von $K_{r_n}(x_n)$. Da $K_{r_n}(x_n)$ bereits abgeschlossen ist (Satz 3.9 (b)), gehört x^* zu $K_{r_n}(x_n)$.

Abschließend überlegen wir uns, dass $\cap_n K_{r_n}(x_n)$ keine zwei voneinander verschiedenen Punkte enthält. Angenommen, x^* und x^{**} liegen in $\cap_n K_{r_n}(x_n)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ findet man ein n so, dass $2r_n < \varepsilon$ (da ja $r_n \to 0$). Für dieses n ist

$$0 \leq d(x^*, x^{**}) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, x^{**}) \leq 2r_n < \varepsilon.$$

Es ist also $0 \leq d(x^*, x^{**}) < \varepsilon$ fur jedes $\varepsilon > 0$. Nach Folgerung 1.21 muss dann $d(x^*, x^{**}) = 0$, d.h. $x^* = x^{**}$ sein. ∎

Dieser Satz gilt auch in einer allgemeineren Form. Dazu definieren wir den *Durchmesser* einer beschränkten Menge $A \subseteq M$ durch

$$\operatorname{diam} A := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Satz 3.26 (Cantorscher Durchschnittssatz) *Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und (F_n) eine Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von M mit folgenden Eigenschaften:*

$$F_{n+1} \subseteq F_n \quad \textit{für alle } n, \ \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0.$$

Dann ist der Durchschnitt $\cap_n F_n$ nicht leer und besteht aus genau einem Punkt.

Der Beweis verläuft genau wie der von Satz 3.25. Anstelle der Mittelpunkte der Kugeln $K_{r_n}(x_n)$ wählt man irgendwelche Punkte $x_n \in F_n$, und die Rolle der Radien r_n wird von den Durchmessern $\operatorname{diam} F_n$ übernommen. Die Details sollten Sie selbst ausarbeiten.

Anmerkung In den Definitionen der Begriffe *innerer Punkt*, *Häufungspunkt* usw. kommt die Abstandsfunktion explizit nicht vor. Es genügt, wenn man den Begriff der Umgebung voraussetzt. Auch den *Grenzwert* einer Folge kann man einführen, wenn man den Begriff der Umgebung eines Punktes zur Verfügung hat. Dies führt uns auf folgende Idee: Ist M eine nichtleere Menge, so geben wir uns nicht eine Abstandsfunktion auf M vor, sondern für jeden Punkt die Menge seiner Umgebungen. Dies wiederum ist im wesentlichen nichts anderes, als sich die Menge der offenen Mengen auf M vorzugeben.

Definition 3.27 *Sei M eine nichtleere Menge, und $\mathcal{T}$ sei eine Menge von Teilmengen von M. Man nennt $\mathcal{T}$ eine* Topologie auf M *und $(M, \mathcal{T})$ einen* topologischen Raum*, wenn*

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}, \ M \in \mathcal{T}$.

(*b*) *Der Durchschnitt endlich vieler Elemente von $\mathcal{T}$ liegt in $\mathcal{T}$.*

(*c*) *Die Vereinigung beliebig vieler Elemente aus $\mathcal{T}$ liegt wieder in $\mathcal{T}$.*

Ist (M, d) ein metrischer Raum, so wissen wir aus Satz 3.8 und Satz 3.15, dass die Menge aller offener Teilmengen von M eine Topologie auf M bildet. Ist nun $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in M$, so heißt jede Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ eine *Umgebung* von x. Die Definitionen aus Abschnitt 3.3 lassen sich nun wortwörtlich auf topologische Räume übertragen. NICHT übertragen lässt sich jedoch die Definition einer Fundamentalfolge. Hierfür benötigt man eine zusätzliche Struktur, die Umgebungen verschiedener Punkte vergleichbar macht.

Für jede nichtleere Menge M sind die Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &:= \{\emptyset, M\}, \\ \mathcal{T}_2 &:= \text{Menge aller Teilmengen von } M\end{aligned}$$

Topologien auf M. Wann konvergiert eine Folge bezüglich einer dieser Topologien?

4 Zahlenfolgen

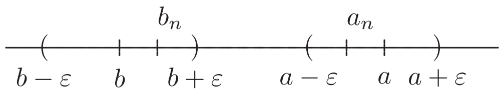
Wir betrachten in diesem Abschnitt Folgen reeller oder komplexer Zahlen.

4.1 Rechnen mit Grenzwerten

Wir beginnen mit einigen einfachen Regeln für den Umgang mit konvergenten Zahlenfolgen, die ohne das Vollständigkeitsaxiom auskommen.

Satz 4.1 *Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen reeller Zahlen, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n$. Dann ist auch $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

Beweis Sei $a := \lim a_n$ und $b := \lim b_n$. Angenommen, es wäre $a > b$. Dann wählen wir ein $\varepsilon \in (0, \frac{a-b}{2})$ sowie Folgenglieder $a_n \in U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ und $b_n \in U_\varepsilon(b) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ (diese a_n und b_n gibt es nach Definition des Grenzwertes).



Nun ist

$$a_n - b_n \geq (a-\varepsilon) - (b+\varepsilon) = a - b - 2\varepsilon = 2\Big(\frac{a-b}{2} - \varepsilon\Big) > 0.$$

Die Aussage $a_n > b_n$ steht im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Die Aussage des Satzes bleibt richtig, wenn man $a_n \leq b_n$ für alle n aus einer unendlichen Teilmenge von $\mathbb{N}$ voraussetzt. Es ist aber NICHT richtig, dass aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt: $\lim a_n < \lim b_n$.

Satz 4.2 (Einschließungskriterium) *Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls die Folgen (a_n) und (c_n) konvergieren und den gleichen Grenzwert a besitzen, so konvergiert auch die Folge (b_n), und ihr Grenzwert ist ebenfalls a.*

Beweis Offenbar liegt wenigstens einer der Punkte a_n, c_n nicht näher an a als b_n, d.h. es ist

$$|a - b_n| \leq \max\{|a - a_n|, |a - c_n|\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann finden wir Zahlen N_1, N_2 so, dass $|a - a_n| < \varepsilon$ für $n \geq N_1$ und $|a - c_n| < \varepsilon$ für $n \geq N_2$. Für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ ist

$$|a - b_n| \leq \max\{|a - a_n|, |a - c_n|\} < \varepsilon,$$

d.h. die Folge (b_n) konvergiert gegen a. ■

Eine Folge (a_n) komplexer Zahlen heißt *Nullfolge*, wenn $\lim a_n = 0$.

Satz 4.3 *Das Produkt* $(a_n b_n)$ *einer beschränkten Folge* (b_n) *mit einer Nullfolge* (a_n) *ist wieder eine Nullfolge.*

Beweis Da (b_n) beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$ so, dass $|b_n| \leq M$ für alle n. Für jedes n ist dann

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \leq M|a_n|.$$

Wegen $\lim a_n = 0$ folgt die Behauptung aus dem Einschließungskriterium (Satz 4.2). ∎

Satz 4.4 *Seien* $(a_n), (b_n)$ *konvergente Folgen komplexer Zahlen. Dann gilt*

(*a*) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.

(*b*) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

(*c*) *falls alle* $b_n \neq 0$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

Dieser Satz ist (z.B. im Teil (*a*)) wie folgt zu lesen: Wenn die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren, dann konvergiert auch die Folge $(a_n + b_n)$, und ihr Grenzwert kann wie angegeben bestimmt werden. Zu (*c*) sei vermerkt, dass aus $\lim b_n \neq 0$ bereits $b_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n folgt.

Beweis Es sei $a := \lim a_n$ und $b := \lim b_n$.

(*a*) Wir zeigen die Aussage für die Addition. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann findet man Zahlen N_1, N_2 so, dass $|a - a_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_1$ und $|b - b_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_2$. Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

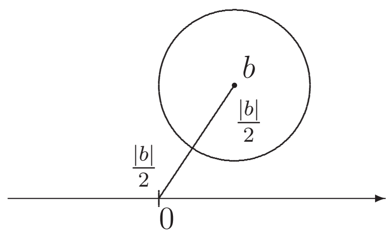
$$|(a + b) - (a_n + b_n)| = |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon.$$

(*b*) In der Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 \leq |ab - a_n b_n| &= |ab - ab_n + ab_n - a_n b_n| = |a(b - b_n) + (a - a_n)b_n| \\ &\leq |a|\,|b - b_n| + |a - a_n|\,|b_n| \qquad (4.1) \end{aligned}$$

sind die Folgen $(|a|)$ und $(|b_n|)$ beschränkt (Satz 3.20), und die Folgen $(|b - b_n|)$ und $(|a - a_n|)$ sind Nullfolgen. Nach Satz 4.3 sind dann auch $(|a|\,|b - b_n|)$ sowie $(|a - a_n|\,|b_n|)$ Nullfolgen. Aus Teil (*a*) dieses Satzes folgt, dass die rechte Seite von (4.1) für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Das Einschließungskriterium (Satz 4.2) liefert schließlich, dass $|ab - a_n b_n| \to 0$.

(*c*) Wir überlegen uns zuerst, dass die Folge $(1/b_n)$ beschränkt ist. Wegen $\lim b_n = b$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|b - b_n| < |b|/2$ für alle $n \geq N$.



Für diese b_n gilt offenbar $|b_n| \geq |b|/2$ bzw. $|1/b_n| \leq 2/|b|$. Wir setzen

$$M := \max\left\{\left|\frac{1}{b_1}\right|, \left|\frac{1}{b_2}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{b_{N-1}}\right|, \frac{2}{|b|}\right\}.$$

Dann gilt $|1/b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(1/b_n)$ ist also beschränkt. Nun ist

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{a}{b_n} + \frac{a}{b_n} - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right) + \frac{1}{b_n}(a - a_n)\right| \\ &= \quad \left|\frac{a}{bb_n}(b_n - b) + \frac{1}{b_n}(a - a_n)\right| \leq \left|\frac{a}{bb_n}\right| |b_n - b| + \left|\frac{1}{b_n}\right| |a - a_n|, \end{aligned}$$

und wir können wie in Teil (b) argumentieren, um die Konvergenz von a_n/b_n gegen a/b zu erhalten. ■

Beispiele (1) Es sei $a_n = \frac{n^2+3n-4}{2n^2-n+5}$. Wegen $a_n = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}$ und wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ für $k = 1, 2$ (vgl. Beispiel **(2)** aus Abschnitt 3.4 gilt nach Satz 4.4 $\lim_n a_n = \frac{1}{2}$. ■

(2) Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n+2} \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{n^2+n}{n^2+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \\ &= \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$ ■

Definition 4.5 *Eine Folge* (a_n) *reeller Zahlen heißt* bestimmt divergent *mit dem* uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ *(bzw.* $-\infty$*), wenn für jedes* $w > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $a_n > w$ *für alle* $n \geq N$ *(bzw.* $a_n < -w$ *für alle* $n \geq N$*). In diesem Fall schreiben wir* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *(bzw.* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$*).*

Beispiel Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Ist nämlich $w > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es nach Satz 1.20 ('Archimedisches Axiom') ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \sqrt{w}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$a_n = n^2 \geq N^2 > w.$$

Dagegen ist die Folge (b_n) mit $b_n = (-1)^n n^2$ divergent, aber nicht bestimmt divergent. ■

4.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Unser nächstes Ziel ist es, die Vollständigkeit des metrischen Raumes $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ zu zeigen. Auf dem Weg dahin leiten wir einige Konvergenzkriterien ab. Die Beweise der beiden ersten Sätze sind uns im wesentlichen bereits bekannt.

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n).

Satz 4.6 *Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen ist konvergent, und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Der Beweis verläuft für monoton fallende Folgen genauso wie im Beispiel aus Abschnitt 3.5, wo wir gezeigt haben, dass die (monoton fallende) Folge der Näherungswerte beim babylonischen Wurzelziehen gegen ihr Infimum konvergiert. Dieser Beweis kann leicht auf monoton wachsende Folgen übertragen werden. (HA)

Satz 4.7 (Intervallschachtelungssatz) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei ein abgeschlossenes Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ (mit $a_n \le b_n$) gegeben. Weiter gelte*

$$I_{n+1} \subseteq I_n \quad \textit{für jedes } n \textit{ und} \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Dann ist der Durchschnitt $\cap_n I_n$ nicht leer und besteht aus genau einem Punkt.

Diese Aussage erinnert uns an den Cantorschen Durchschnittssatz. Da wir jedoch noch nicht wissen, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist, können wir uns nicht auf diesen Satz berufen.

Beweis Wir sehen uns die Folgen (a_n) bzw. (b_n) der linken bzw. rechten Randpunkte der Intervalle I_n an. Aus der Einbettungseigenschaft folgt, dass (a_n) eine monoton wachsende und nach oben (z.B. durch b_0) beschränkte Folge ist, und die Folge (b_n) ist monoton fallend und nach unten (etwa durch a_0) beschränkt. Nach Satz 4.6 sind beide Folgen konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert von (a_n) mit a und den von (b_n) mit b. Dann ist $a = b$, denn

$$a - b = \lim a_n - \lim b_n = \lim(a_n - b_n) = 0.$$

Wir zeigen weiter, dass a zu jedem Intervall I_k gehört. Für alle $n \ge k$ ist nämlich $a_k \le a_n \le b_k$, und Übergang zum Grenzwert $n \to \infty$ liefert $a_k \le a \le b_k$, also $a \in I_k$. Insbesondere ist $\cap_n I_n$ nicht leer.

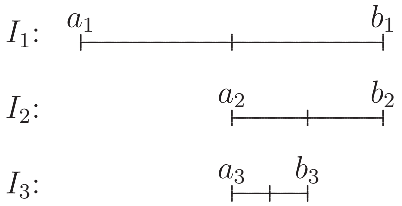
Schließlich überlegen wir uns, dass $a (= b)$ der einzige Punkt in $\cap_n I_n$ ist. Für jeden Punkt x in $\cap I_n$ ist ja

$$a_n \le x \le b_n \quad \text{für alle } n.$$

Wir lassen in dieser Ungleichung n gegen ∞ streben und erhalten $a \le x \le b$, woraus wegen $a = b$ sofort $x = a$ folgt. ■

Satz 4.8 (Bolzano/Weierstraß) *Jede unendliche beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt.*

Beweis Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ unendlich und beschränkt. Dann kann M sicher in ein Intervall $I_1 = [a_1, b_1]$ eingeschlossen werden. Das Intervall I_1 wird halbiert. Dann gibt es eine Hälfte, in der unendlich viele Punkte aus M liegen. Diese Hälfte bezeichnen wir mit $I_2 := [a_2, b_2]$.



(Sollten in beiden Hälften von I_1 unendlich viele Punkte liegen, so wählen wir eine dieser beiden als I_2.) Nun halbieren wir I_2 und wählen eine der Hälften so, dass sie unendlich viele Punkte aus M enthält. Diese sei $I_3 := [a_3, b_3]$. Wir fahren auf diese Weise fort und erhalten eine Folge (I_n) abgeschlossener Intervalle mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle n. Für die Intervalllängen gilt:

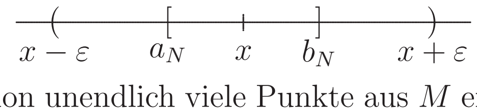
$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \ldots = \frac{b_2 - a_2}{2^{n-2}} = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

Da $\frac{1}{n} \to 0$, und da $(\frac{1}{2^{n-1}})$ eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})$ ist, folgt

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Der Intervallschachtelungssatz ist somit anwendbar. Es gibt also genau einen Punkt x aus $\mathbb{R}$, der in jedem der Intervalle I_n liegt.

Wir müssen uns noch davon überzeugen, dass x Häufungspunkt von M ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es wegen $\lim(b_n - a_n) = 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $0 < b_N - a_N < \varepsilon$. Wegen $a_N \leq x \leq b_N$ folgt daraus $|a_N - x| < \varepsilon$ und $|x - b_N| < \varepsilon$. Also ist $[a_N, b_N] = I_N \subseteq U_\varepsilon(x)$.



Da I_N nach Definition unendlich viele Punkte aus M enthält, enthält auch $U_\varepsilon(x)$ unendlich viele Punkte aus M. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, enthält *jede* Umgebung von x unendlich viele Punkte aus M. Also ist x ein Häufungspunkt von M. ■

Der Satz von Bolzano/Weierstraß wird oft in folgender Form benutzt:

Satz 4.9 (Bolzano/Weierstraß) *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis Sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Wir unterscheiden 2 Fälle.
Fall 1: Die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist endlich. Dann muss es einen Wert, etwa a_N, geben, der in der Folge (a_n) unendlich oft vorkommt. Es gibt also eine Teilfolge (a_{k_n}) von (a_n) mit $a_{k_n} = a_N$ für alle n. Die Teilfolge (a_{k_n}) ist konstant und daher konvergent.
Fall 2: Die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist unendlich. Da diese Menge nach Voraussetzung beschränkt ist, besitzt sie nach Bolzano/Weierstraß eine Häufungspunkt x. Wir zeigen, dass x Grenzwert einer Teilfolge von (a_n) ist. Diese Teilfolge lässt sich wie folgt konstruieren. In $U_1(x)$ liegen unendlich viele der Folgenglieder a_n. Wir wählen eines davon aus, das von x verschieden ist. Dieses sei etwa a_{k_1}. In $U_{1/2}(x)$ liegen ebenfalls unendlich viele der a_n. Wir wählen eines davon, etwa a_{k_2}, und zwar so, dass $a_{k_2} \neq x$ und $k_2 > k_1$. Dann wählen wir aus $U_{1/3}(x)$ ein a_{k_3} mit $a_{k_3} \neq x$ und $k_3 > k_2$ und fahren so fort. Das Resultat ist eine Teilfolge (a_{k_n}) von (a_n). Diese Teilfolge konvergiert gegen x, da nach Konstruktion

$$|x - a_{k_n}| < 1/n \quad \text{für alle } n. \qquad \blacksquare$$

Wir haben nun genügend Vorbereitungen getroffen, um die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ beweisen zu können. Die folgenden beiden Sätze drücken exakt das Gleiche aus.

Satz 4.10 *Die Menge $\mathbb{R}$, versehen mit dem Betragsabstand, ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Satz 4.11 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Fundamentalfolge ist.*

Beweis In Satz 3.23 haben wir bewiesen, dass jede konvergente Folge eine Fundamentalfolge ist. Zu zeigen ist also noch: jede Fundamentalfolge reeller Zahlen konvergiert. Wir gliedern den Beweis in drei Schritte.
1. Schritt: Hier zeigen wir, dass *jede Fundamentalfolge beschränkt ist*. Sei (a_n) eine Fundamentalfolge. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Insbesondere ist $|a_n - a_N| < 1$ für alle $n \geq N$. Von der Stelle N an liegen also alle Folgenglieder in der 1–Umgebung von a_N. Nun vergrößern wir diese Umgebung so weit, dass sie auch die übrigen (endlich vielen) Folgenglieder $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ umfasst. In dieser vergrößerten Umgebung liegen alle Glieder der Folge. Also ist die Folge (a_n) beschränkt.
2. Schritt: Aus Schritt 1 und dem Satz von Bolzano–Weierstraß folgt sofort: *Jede Fundamentalfolge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge*.
3. Schritt: Wir zeigen abschließend: *Wenn eine Fundamentalfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, so ist sie selbst konvergent*.
Sei (a_n) eine Fundamentalfolge, und (a_{k_n}) sei eine konvergente Teilfolge von (a_n)

mit Grenzwert a. Weiter sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da (a_n) Fundamentalfolge ist, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } m, n \geq N_1.$$

Da (a_{k_n}) gegen a konvergiert, gibt es außerdem ein $N_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a - a_{k_n}| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N_2.$$

Wegen $k_n \geq n$ gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$

$$|a - a_n| = |a - a_{k_n} + a_{k_n} - a_n| \leq |a - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a_n| < \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge (a_n) und hat a als ihren Grenzwert. ■.

Beachten Sie, dass die in den Schritten 1 und 3 formulierten Teilaussagen in beliebigen metrischen Räumen gelten.

4.3 Einige spezielle Grenzwerte

Beispiel 1 Sei $r \in \mathbb{R}$ und $a_n := r^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{falls} \quad r > 1 \quad \text{(bestimmte Divergenz)} \\ 1 & \text{falls} \quad r = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad r \in (-1, 1), \end{cases}$$

und die Folge (a_n) ist divergent, aber nicht bestimmt divergent, für $r \leq -1$. Es gilt auch $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ für $r \in \mathbb{C}$ und $|r| < 1$. Dies sollen Sie in der Übung zeigen. ■

Beispiel 2 Sei $r > 0$. Für jede positive natürliche Zahl n sei $a_n := \sqrt[n]{r}$. Wir haben uns bisher nicht über n. Wurzeln aus positiven reellen Zahlen unterhalten, falls $n > 2$. Dies holen wir später nach. Im Moment genügen uns die Kenntnisse aus der Schule. Man kann $\sqrt[k]{r}$ auch wie beim babylonischen Wurzelziehen erklären. Die durch den Startwert $w_0 := r$ und die Rekursionsvorschrift

$$w_{n+1} := \frac{1}{k}\Big((k-1)w_n + \frac{r}{w_n^{k-1}}\Big) \quad \text{für } n \geq 0$$

festgelegte Folge (w_n) konvergiert nämlich gegen $\sqrt[k]{r}$.
Wir zeigen nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1.$$

Sei zunächst $r \geq 1$. Setzt man in der Bernoullischen Ungleichung

$$(1+a)^n \geq 1 + na \quad \text{für alle } a > -1 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

für a den Wert $\sqrt[n]{r}-1$ ein, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$0 \leq \sqrt[n]{r}-1 \leq \frac{r-1}{n}\,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{r-1}{n}=0$ folgt die Behauptung aus dem Einschließungskriterium (Satz 4.2). Ist $r \in (0,1)$, so schreiben wir r als $1/s$ mit $s>1$ und können wegen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{r}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{s}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{s}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{s}}$$

(nach Satz 4.4) das Resultat für $r>1$ anwenden. ■

Beispiel 3 Es ist $\lim \sqrt[n]{n}=1$. Um dies zu beweisen, leiten wir zunächst die folgende Ungleichung her:

$$\textit{Für alle } x \geq 0 \textit{ und jede natürliche Zahl } n \geq 2 \textit{ gilt: } (1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}\,x^2. \tag{4.2}$$

Nach dem binomischen Satz ist nämlich

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \geq \binom{n}{2}x^2=\frac{n(n-1)}{2}\,x^2,$$

da alle weggelassenen Summanden nicht negativ sind. Die zu zeigende Ungleichung folgt nun sofort aus

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n}{2}\,(n-1) \geq \frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{n^2}{4}.$$

Setzen wir in der Ungleichung (4.2) für x den Wert $\frac{2}{\sqrt{n}}$ ein, so folgt

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq \frac{n^2}{4}\cdot\frac{4}{n}=n \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Es ist also $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$ für alle n. Wir zeigen nun noch, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0. \tag{4.3}$$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig vorgegeben und $N>1/\varepsilon^2$. Für alle $n \geq N$ ist dann

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon.$$

Hieraus folgt (4.3), und das Einschließungskriterium (Satz 4.2) liefert die Behauptung. ■

Beispiel 4 Wir wollen zeigen, dass die Folge (a_n) mit $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert. Dazu zeigen wir, dass diese Folge monoton wächst und nach oben durch 3 beschränkt ist. Satz 4.6 liefert dann die Existenz des Grenzwertes.
Monotonie Für $n \geq 2$ ist

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n-1} = \Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^n \frac{n}{n-1} = \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^n \frac{n}{n-1}\,.$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt

$$\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}\,.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \frac{n}{n-1} = 1\,,$$

d.h. es ist $a_n \geq a_{n-1}$ für alle $n \geq 2$.
Beschränktheit Aus dem binomischen Satz folgt zunächst

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Für alle $k \geq 1$ gilt die Abschätzung

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Hieraus und mit der Summenformel für die geometrische Reihe folgt

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Damit ist die Existenz des Grenzwertes $\lim(1 + \frac{1}{n})^n$ gesichert. Dieser Grenzwert heißt *Eulersche Zahl* und wird mit e bezeichnet. Eine näherungsweise Berechnung liefert $e \approx 2.7182\ldots$. Wir zeigen später, dass e irrational ist. ■

Beispiel 5 Für $n \geq 1$ sei $a_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$. Wir wollen die Konvergenz der Folge (a_n) nachweisen. Da diese Folge offenbar nicht monoton ist, arbeiten wir mit den Cauchyschen Konvergenzkriterium. Wir zeigen also, dass (a_n) eine Fundamentalfolge ist. Für $m \geq n + 2$ ist

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \Big| \sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \Big| = \Big| (-1)^n \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{m} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \Big| \\ &= \Big| \frac{1}{n+1} - \sum_{k=n+2}^{m} (-1)^{k-n} \frac{1}{k} \Big|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Weiter ist

$$\sum_{k=n+2}^{m} (-1)^{k-n}\frac{1}{k} = \Big(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\Big) + \Big(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\Big) + \ldots > 0$$

sowie

$$\sum_{k=n+2}^{m} (-1)^{k-n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+2} - \Big(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\Big) - \Big(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\Big) - \ldots < \frac{1}{n+2}.$$

Daraus und aus (4.4) folgt $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n+1}$, und dies gilt nun sogar für alle $m \geq n$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Für alle $m, n \geq N$ gilt dann

$$|a_m - a_n| \leq \max\Big\{\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}\Big\} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Also ist (a_n) eine Fundamentalfolge und damit konvergent. Man kann zeigen, dass der Grenzwert dieser Folge gleich $\ln 2$ ist. ■

4.4 Partielle Grenzwerte

Sei (M, d) ein metrischer Raum und (a_n) eine Folge in M. Ein Punkt $a \in M$ heißt *partieller Grenzwert* der Folge (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert. Eine konvergente Folge besitzt genau einen partiellen Grenzwert, nämlich den Grenzwert dieser Folge. In den folgenden Beispielen ist $M = \mathbb{R}$.

Beispiele **(1)** Sei $a_n = (-1)^n$. Die Folgenglieder mit geraden Indizes sind gleich 1, die mit ungeraden Indizes gleich -1. Daher besitzt die Folge (a_n) genau zwei partielle Grenzwerte, nämlich 1 und -1.
(2) Die Folge $(1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, \ldots)$ hat 0 und 1 als ihre partiellen Grenzwerte.
(3) Sei (a_n) eine Folge, deren Werte die rationalen Zahlen aus $(0, 1)$ durchlaufen (eine solche Folge haben wir im Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ konstruiert). Dann ist jeder Punkt aus $[0, 1]$ ein partieller Grenzwert der Folge (a_n). ■

Satz 4.12 *Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge aller partiellen Grenzwerte von (a_n) abgeschlossen, beschränkt und nichtleer.*

Zum Beweis Aus dem Satz von Bolzano/Weierstraß wissen wir, dass jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt. Also ist die Menge der partiellen Grenzwerte von (a_n) nicht leer. Dass diese Menge auch abgeschlossen und beschränkt ist, bleibt auch richtig, wenn in der Formulierung des Satzes $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen metrischen Raum ersetzt wird. Diesen Beweis sollen Sie in der Übung führen. ■

Wir betrachten nun ausschließlich Folgen in $\mathbb{R}$. Da die Menge der partiellen Grenzwerte einer beschränkten Folge nichtleer und beschränkt ist, besitzt sie ein endliches Infimum und Supremum. Da diese Menge außerdem abgeschlossen ist, gehören Infimum und Supremum zur Menge. Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt also einen kleinsten und einen größten partiellen Grenzwert. Diese heißen der *Limes inferior* bzw. *Limes superior* von (a_n) und werden mit

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n$$

bezeichnet. Ist die Folge (a_n) nach unten bzw. oben unbeschränkt, so schreibt man auch

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

In den oben betrachteten Beispielen **(2)** und **(3)** ist offenbar $\liminf a_n = 0$ und $\limsup a_n = 1$. Es ist auch klar, dass eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen genau dann konvergiert, wenn $\liminf a_n = \limsup a_n$, und dass in diesem Fall der Grenzwert der Folge mit $\liminf a_n$ übereinstimmt.

4.5 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{C}$

Wir betrachten nun Folgen (a_n) in $\mathbb{R}^k$, d.h. jedes Folgenglied a_n ist ein k–Tupel (oder ein Vektor mit k Einträgen): $a_n = (a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)})$. Jede Folge (a_n) in $\mathbb{R}^k$ definiert k "Koordinatenfolgen" $(a_n^{(1)}), \ldots, (a_n^{(k)})$. Dies sind Folgen reeller Zahlen.

Satz 4.13 *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^k$, und $\mathbb{R}^k$ sei versehen mit dem Euklidschen Abstand. Dann gilt:*

(a) *Die Folge (a_n) konvergiert genau dann in $\mathbb{R}^k$, wenn jede ihrer Koordinatenfolgen in $\mathbb{R}$ konvergiert. In diesem Fall gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)}, \ldots, \lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}\right).$$

(b) *Die Folge (a_n) ist genau dann eine Fundamentalfolge in $\mathbb{R}^k$, wenn jede ihrer Koordinatenfolgen eine Fundamentalfolge in $\mathbb{R}$ ist.*

Beweis (a) Die Folge (a_n) mit $a_n = (a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)})$ konvergiere gegen $a = (a^{(1)}, \ldots, a^{(k)})$. Für jedes $j = 1, \ldots, k$ gilt dann

$$0 \le |a_n^{(j)} - a^{(j)}| \le \sqrt{(a_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \ldots + (a_n^{(k)} - a^{(k)})^2} = \|a_n - a\| \to 0.$$

Die Folge $(a_n^{(j)})_{n\ge 0}$ konvergiert also gegen $a^{(j)}$. Ist umgekehrt $a_n^{(j)} \to a^{(j)}$ für jedes $j = 1, \ldots, k$, so folgt

$$0 \le \|a_n - a\|^2 = (a_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \ldots + (a_n^{(k)} - a^{(k)})^2 \to 0,$$

und aus $\|a_n - a\|^2 \to 0$ folgt $\|a_n - a\| \to 0$.
(b) Ist (a_n) Fundamentalfolge, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Für alle $j = 1, \ldots, k$ und $m, n \geq N$ gilt dann auch

$$0 \leq |a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| \leq \sqrt{(a_n^{(1)} - a_m^{(1)})^2 + \ldots + (a_n^{(k)} - a_m^{(k)})^2} = \|a_n - a_m\| < \varepsilon,$$

d.h. jede Folge $(a_n^{(j)})_{n \geq 0}$ ist Fundamentalfolge. Sei umgekehrt $(a_n^{(j)})_{n \geq 0}$ eine Fundamentalfolge für jedes $j = 1, \ldots, k$. Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ findet man Zahlen N_j so, dass $|a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| < \varepsilon/\sqrt{k}$ für alle $m, n \geq N_j$. Wir wählen $N := \max\{N_1, \ldots, N_k\}$. Für alle $m, n \geq N$ gilt dann

$$0 \leq \|a_n - a_m\|^2 = (a_n^{(1)} - a_m^{(1)})^2 + \ldots + (a_n^{(k)} - a_m^{(k)})^2 < \frac{\varepsilon^2}{k} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{k} = \varepsilon^2.$$

Aus $\|a_n - a_m\|^2 < \varepsilon^2$ folgt aber $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n > N$. Also ist (a_n) eine Fundamentalfolge. ■

Satz 4.14 *Für jedes $k \geq 1$ ist der Raum $\mathbb{R}^k$, versehen mit den Euklidschen Abstand, vollständig.*

Beweis Ist (a_n) Fundamentalfolge in $\mathbb{R}^k$, so ist nach Satz 4.13 (b) jede Koordinatenfolge $(a_n^{(j)})$ Fundamentalfolge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist (= Cauchysches Konvergenzkriterium), konvergiert jede Koordinatenfolge in $\mathbb{R}$. Nach Satz 4.13 (a) konvergiert dann auch die Folge (a_n) in $\mathbb{R}^k$. ■

Folgerung 4.15 *Der Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist vollständig.*

Folgerung 4.16 *In $\mathbb{R}^k$ (insbesondere in $\mathbb{C}$) gilt der Cantorsche Durchschnittssatz.*

Folgerung 4.17 (Bolzano/Weierstraß in $\mathbb{R}^k$)

(a) *Jede unendliche beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ besitzt einen Häufungspunkt.*

(b) *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^k$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Wir skizzieren den Beweis der letzten Aussage. Ist (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^k$, so ist jede der Koordinatenfolgen $(a_n^{(j)})$ beschränkt in $\mathbb{R}$. Nach Bolzano/Weierstraß für $\mathbb{R}$ (= Satz 4.9) findet man eine Teilfolge (a_{k_n}) von (a_n), für die die erste Koordinatenfolge $(a_{k_n}^{(1)})$ konvergiert. Für diese Teilfolge findet man wiederum eine Teilfolge, für die auch die zweite Koordinatenfolge konvergiert. Wir fahren so fort und erhalten schließlich eine Teilfolge von (a_n), für die jede Koordinatenfolge konvergiert. Nach Satz 4.13 (a) ist diese Teilfolge selbst konvergent. ■

Ein Ausblick: Julia–Mengen Diese nach Gaston Julia (1893 – 1978) benannten Mengen zeigen, dass bereits einfachste Bildungsvorschriften für Folgen zu sehr komplexen Erscheinungen führen können. Wir fixieren eine komplexe Zahl c und betrachten für jeden Startwert $z_0 \in \mathbb{C}$ die durch

$$z_{n+1} := z_n^2 + c, \quad n \in \mathbb{N}$$

bestimmte Folge (z_n). Offenbar gibt es für jeden Startwert z_0 genau zwei Möglichkeiten: entweder die Folge (z_n) ist beschränkt, oder sie ist unbeschränkt. Die Menge aller Startwerte, für die die Folge (z_n) beschränkt bleibt, heißt die *Gefangenenmenge* des Parameters c, und die übrigen Startwerte fasst man zur *Fluchtmenge* von c zusammen. Beide Mengen sind nicht leer. Da die Gleichung $z^2 + c = z$ stets eine komplexe Lösung besitzt, gibt es nämlich Startwerte, für die die Folge (z_n) konstant ist. Also ist die Gefangenenmenge nicht leer. Andererseits kann man sich leicht überlegen, dass genügend große Startwerte immer in der Fluchtmenge liegen. Unter der *Juliamenge* des Parameters c versteht man den gemeinsamen Rand der Gefangenen– bzw. Fluchtmenge von c. Für $c = 0$ rechnet man leicht nach, dass die Gefangenenmenge gerade die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und die Juliamenge die Einheitskreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist. Bei anderen Parametern c wird man in der Regel wesentlich kompliziertere (und auch ästhetisch ansprechende) Juliamengen erhalten. Eine Auswahl von Bildern solcher Mengen finden Sie beispielsweise in den Büchern von Peitgen, Jürgens und Saupe: "Bausteine des Chaos: Fraktale" und "Chaos: Bausteine der Ordnung". Auch die berühmte *Mandelbrot–Menge* (auch als "Apfelmännchen" bekannt) lässt sich auf ähnliche Weise definieren. Sie besteht genau aus den Zahlen $c \in \mathbb{C}$, für die die durch $z_0 := c$ und $z_{n+1} = z_n^2 + c$ erklärte Folge beschränkt ist. Zwischen Juliamengen und der Mandelbrotmenge gibt es zahlreiche Verbindungen. Auf eine davon gehen wir später ein.

5 Zahlenreihen

Mit Hilfe der Körperaxiome lassen sich Summen *endlich* vieler Zahlen erklären. In diesem Abschnitt untersuchen wir Summen unendlich vieler Zahlen – so genannte Reihen. Dazu betrachten wir Reihen als spezielle Folgen.

5.1 Konvergenz von Reihen

Definition 5.1 *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, und sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ heißt die zu (a_n) gehörende* Reihe*. Die Zahlen a_n heißen die* Glieder *der Reihe, und die s_n ihre* Partialsummen*. Ist die Folge (s_n) konvergent und s ihr Grenzwert, so heißt die Reihe* konvergent*, die Zahl s heißt* Summe *dieser Reihe, und man schreibt $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.*

Eine Reihe ist also die Folge ihrer Partialsummen. Häufig wählt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch als *Bezeichnung* für die Reihe (s_n). Aus dem Kontext wird in der Regel klar, ob $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für die Reihe selbst oder für ihre Summe steht.

Es macht offenbar keinen Sinn, Reihen in allgemeinen metrischen Räumen zu betrachten. Man kann aber Reihen in $\mathbb{R}^k$ und insbesondere in $\mathbb{C}$ definieren, und **viele der nachfolgenden Resultate gelten auch für Reihen in $\mathbb{R}^k$ und in $\mathbb{C}$** (gegebenenfalls nach Ersetzen des Betrages durch die Euklidsche Norm).

Satz 5.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass*

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Big| = |a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon \quad \textit{für alle } m > n \geq N.$$

Beweis Wir wenden das Cauchysche Konvergenzkriterium auf die Folge (s_n) an und beachten, dass für $m > n$ gilt:

$$s_m - s_n = \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k. \qquad \blacksquare$$

Wählt man $m = n+1$ in Satz 5.2, so reduziert sich $\sum_{k=n+1}^{m} a_k$ auf einen einzigen Summanden a_{n+1}, und man erhält

Satz 5.3 (Notwendiges Konvergenzkriterium) *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Satz 5.2 liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Dagegen ist die Bedingung $\lim a_k = 0$ aus Satz 5.3 nur notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz dieser Reihe (vgl. Beispiel 2).

Beispiel 1 *Die geometrische Reihe.* Sei $z \in \mathbb{C}$ und $a_n = z^n$ für $n \geq 0$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ kann für $|z| \geq 1$ nicht konvergieren, da in diesem Fall die notwendige Bedingung aus Satz 5.3 verletzt ist. Sei also $|z| < 1$. Aus Abschnitt 1.3.4 wissen wir, dass

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\,.$$

Da für $|z| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ (vgl. Beispiel 1 aus 4.3), folgt sofort

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-z}, \quad \text{d.h.} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ heißt *geometrische Reihe*. Sie konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$, und ihre Summe ist gleich $\frac{1}{1-z}$. ■

Beispiel 2 *Die harmonische Reihe.* Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ heißt die *harmonische Reihe*. Für sie ist die notwendige Bedingung aus Satz 5.3 erfüllt. Dennoch divergiert diese Reihe. Für jedes $n \geq 1$ ist nämlich

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium kann (s_n) nicht konvergieren. Da (s_n) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, schreibt man auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. ■

Beispiel 3 *Eine Reihe für e.* Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ gegen die in Beispiel 4 in 4.3 eingeführte Zahl e konvergiert. Dazu bezeichnen wir $(1+\frac{1}{n})^n$ mit a_n und schreiben s_n für $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Im Beispiel 4 aus 4.3 haben wir uns überlegt, dass

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n \leq 3. \tag{5.1}$$

Die Folge (s_n) ist offenbar monoton wachsend und wegen (5.1) nach oben beschränkt. Nach Satz 4.6 konvergiert diese Folge, und wir bezeichnen ihren Grenzwert mit s. Geht man in der Ungleichung $a_n \leq s_n$ aus (5.1) mit n gegen Unendlich, folgt $e \leq s$.

Wir überlegen uns nun, dass $e \geq s$ ist, und schätzen dazu a_n nach unten ab. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine fixierte Zahl. Für alle $n \geq m$ ist

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}. \tag{5.2}$$

Auf der rechten Seite von (5.2) steht eine Summe mit einer von n unabhängigen Anzahl von Summanden, und für $n \to \infty$ geht der k. Summand gegen $\frac{1}{k!}$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ in (5.2) liefert also

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m. \tag{5.3}$$

Dies gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$. Lässt man in (5.3) m gegen Unendlich laufen, folgt $e \geq s$. Damit ist gezeigt, dass $s = e$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist übrigens wesentlich besser zur näherungsweisen Berechnung von e geeignet als der Grenzwert $\lim\,(1 + \frac{1}{n})^n$. ■

In Beispiel 5 aus 4.3 haben wir mit $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ein weiteres Beispiel für eine konvergente Reihe kennengelernt. Der Konvergenznachweis aus diesem Beispiel lässt sich übertragen auf beliebige alternierende Reihen.

Definition 5.4 *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ *heißt* alternierend*, wenn* $c_k > 0$ *für alle* k*.*

Satz 5.5 (Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ *sei eine alternierende Reihe, und zusätzlich gelte: die Folge* (c_k) *fällt monoton und konvergiert gegen* 0*. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$*.*

Beweis Für $m > n$ sei $s_{nm} := c_{n+1} - c_{n+2} + c_{n+3} - \ldots + (-1)^{m-n-1} c_m$. Dann ist zunächst

$$s_{nm} = (c_{n+1} - c_{n+2}) + (c_{n+3} - c_{n+4}) + \ldots + \begin{cases} c_m & \text{falls } m-n \text{ ungerade} \\ (c_{m-1} - c_m) & \text{falls } m-n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Da (c_n) monoton fallend ist und alle c_n positiv sind, folgt $s_{nm} \geq 0$. Durch anderes Setzen der Klammern erhalten wir

$$s_{nm} = c_{n+1} - (c_{n+2} - c_{n+3}) - \ldots - \begin{cases} c_m & \text{falls } m-n \text{ gerade} \\ (c_{m-1} - c_m) & \text{falls } m-n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und wie oben folgt hieraus $s_{nm} \leq c_{n+1}$.

Nach diesen Vorüberlegungen wenden wir das Cauchysche Konvergenzkriterium auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ an. Für die Partialsummen dieser Reihe finden wir im Fall $m > n$:

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |(-1)^{n+1} c_{n+1} + (-1)^{n+2} c_{n+2} + \ldots + (-1)^m c_m| \\ &= |(-1)^{n+1}|\,|c_{n+1} - c_{n+2} + \ldots + (-1)^{m-n-1} c_m| \\ &= |s_{nm}| = s_{nm} \leq c_{n+1}. \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich $|s_m - s_n| \leq c_{m+1}$ im Fall $n \geq m$. In jedem Fall ist also

$$|s_m - s_n| \leq \max\{c_{m+1}, c_{n+1}\} \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim c_n = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|c_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Sind nun $n, m \geq N$, so sind erst recht $n+1, m+1 \geq N$, und aus (5.4) folgt $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Also ist (s_n) eine Fundamentalfolge und damit konvergent. ■

Aus diesem Kriterium folgt beispielsweise die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}.$$

Es folgen einige Anmerkungen zum Rechnen mit Reihen. Aus Satz 4.4 (a) erhalten wir sofort:

Satz 5.6 *Sind* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen und sind* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *so konvergiert auch die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$, *und ihre Summe ist*

$$\alpha\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta\sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Bei *endlichen* Summen wissen wir, dass Klammern beliebig gesetzt werden dürfen (Assoziativität). Wie sieht dies bei Reihen aus?

Satz 5.7 *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe komplexer Zahlen. Weiter sei* $(k_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge natürlicher Zahlen mit* $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$, *und es sei* $A_n := a_{k_n} + a_{k_n+1} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}$. *Dann ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ *konvergent und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beweis Wir setzen $S_m := \sum_{n=0}^{m} A_n$ und $s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n$. Dann ist offenbar

$$S_m = A_0 + \ldots + A_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_{k_{m+1}-1} = s_{k_{m+1}-1}.$$

Die Folge (S_m) ist also eine Teilfolge der konvergenten Folge (s_m) und folglich selbst konvergent. Außerdem haben beide Folgen den gleichen Grenzwert. ∎

Man darf also in konvergenten Reihen beliebig Klammern setzen, ohne an den Konvergenzeigenschaften oder der Summe der Reihe etwas zu ändern. Man darf jedoch Klammern NICHT weglassen, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 0$ für alle n konvergiert und hat die Summe 0. Wir können diese Reihe auch auffassen als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 + 0 + 0 + \ldots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots.$$

Weglassen der Klammern führt auf die divergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. ∎

Bei endlichen Summen wissen wir auch, dass es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt (Kommutativität). Wir werden sehen, dass man die Glieder einer Reihe im allgemeinen NICHT vertauschen darf, dass aber eine Vertauschung möglich ist, wenn die Reihe stärkere Konvergenzeigenschaften besitzt. Mit diesen Eigenschaften befassen wir uns im nächsten Abschnitt.

5.2 Absolut konvergente Reihen

Definition 5.8 *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt* absolut konvergent*, wenn die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Beispielsweise ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent (Leibniz–Kriterium), aber nicht absolut konvergent (harmonische Reihe). Dagegen ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ eine konvergente (Leibnizkriterium) und auch absolut konvergente Reihe (Reihe für e). Reihen mit auschließlich nichtnegativen Gliedern sind offenbar genau dann konvergent, wenn sie absolut konvergent sind. Da außerdem bei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ die Folge der Partialsummen monoton wächst, folgt mit Satz 4.6:

Eine Reihe mit ausschließlich nichtnegativen Gliedern ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Satz 5.9 *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

Beweis Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und seien $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $S_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Für alle $m > n$ gilt

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| = S_m - S_n.$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|S_m - S_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Dann ist aber auch $|s_m - s_n| < \varepsilon$ für alle m, $n \geq N$, und das Cauchysche Konvergenzkriterium liefert die Behauptung. ∎

Wir sehen uns nun einige Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen an.

Satz 5.10 (Vergleichskriterium)

(a) *Ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergent und gilt* $|a_n| \leq b_n$ *für alle* n*, so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(b) *Ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *divergent und gilt* $0 \leq b_n \leq a_n$ *für alle* n*, so ist auch die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Im Fall (a) heißt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine *konvergente Majorante* für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, und im Fall (b) eine *divergente Minorante*.

Beweis (a) Für jede Partialsumme s_n von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ gilt

$$s_n = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \leq b_0 + b_1 + \ldots + b_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_n < \infty.$$

Die Folge (s_n) ist also nach oben beschränkt und offenbar monoton wachsend. Aus Satz 4.6 folgt die Konvergenz von (s_n) und damit die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Für die Partialsummen s_n von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt $s_n = a_0 + \ldots + a_n \geq b_0 + \ldots + b_n$. Da $\sum_{k=0}^{n} b_k$ mit n unbeschränkt wächst, ist auch die Folge (s_n) unbeschränkt. ■

Beispiel Die Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ lassen sich nach oben abschätzen durch

$$\frac{1}{n^2} \leq \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n = 1 \\ \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{falls} \quad n > 1. \end{cases}$$

Die Reihe $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ ist aber konvergent. Für ihre n. Partialsumme s_n gilt nämlich

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Die Folge (s_n) konvergiert also gegen 2. Daher konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
■

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ kann nun ihrerseits als konvergente Majorante für Reihen wie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ mit $r \geq 2$ dienen.

Satz 5.11 (Wurzelkriterium)

(a) *Wenn* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *dann ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(b) *Wenn* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *dann divergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Im Fall $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ist keine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ möglich. Aus Beispiel 3 in 4.3 wissen wir, dass $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Die Anwendung des Wurzelkriteriums auf die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ liefert also jeweils den Wert 1 für den Limes superior. Die erste dieser Reihen ist divergent, die zweite konvergent.

Beweis Sei $a := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.
(a) Wir führen den Beweis mit Hilfe des Vergleichskriteriums und wählen als Vergleichsreihe eine geometrische Reihe. Wegen $a < 1$ finden wir ein $q \in (a, 1)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ für alle $n \geq N$. Dies folgt unmittelbar aus der Definition des $\limsup$; anderenfalls wären ja unendlich viele der $\sqrt[n]{|a_n|}$ größer oder gleich q. Diese besäßen einen partiellen Grenzwert größer oder gleich $q > a$, was der Definition von a widerspricht. Es ist also

$$|a_n| < q^n \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ konvergiert (Beispiel 1 aus 5.1), konvergiert nach Satz 5.10 (a) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

(b) Wegen $a > 1$ gibt es natürliche Zahlen $k_0 < k_1 < \ldots$ so, dass $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \geq 1$ für alle n. Es gibt also $|a_{k_n}| \geq 1$ für unendlich viele Glieder der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, d.h. das notwendige Konvergenzkriterium (Satz 5.3) ist verletzt. ∎

In vielen Fällen einfacher zu handhaben, dafür aber schwächer als das Wurzelkriterium, ist das folgende Kriterium.

Satz 5.12 (Quotientenkriterium)

(a) *Sei $a_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n. Falls* $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, *so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.*

(b) *Für alle hinreichend großen n sei $a_n \neq 0$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.*

Insbesondere ist $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ hinreichend für die Divergenz.

Beweis (a) Sei $b := \limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$. Wir wählen ein $q \in (b, 1)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$ für alle $n \geq N$. Hieraus erhalten wir schrittweise

$$|a_{N+1}| < q|a_N|, \quad |a_{N+2}| < q|a_{N+1}| < q^2|a_N|, \ldots$$

und allgemein (wie man mit vollständiger Induktion leicht bestätigt)

$$|a_n| \leq q^{n-N}|a_N| \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} q^{n-N}|a_N| = |a_N| \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist wegen $q \in (0, 1)$ konvergent (geometrische Reihe) und folglich eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
(b) Für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_{N+1}| \geq |a_N| > 0.$$

Das notwendige Konvergenzkriterium (Satz 5.3) ist also verletzt. ∎

Man kann folgendes beweisen (vgl. Barner/Flohr, Analysis 1, S. 161): Wenn $a_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n, dann ist

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Wenn also die absolute Konvergenz einer Reihe aus dem Quotientenkriterium folgt, so kann man sie (wenigstens im Prinzip) auch aus dem Wurzelkriterium herleiten. Das Wurzelkriterium liefert mitunter aber auch dann noch eine Entscheidung, wenn das Quotientenkriterium versagt.

Beispiel Sei $0 < q < 1$. Wir betrachten die folgende Umordnung der geometrischen Reihe

$$q^1 + q^0 + q^3 + q^2 + q^5 + q^4 + q^7 + q^6 + \dots .$$

Für diese Reihe ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} 1/q > 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ q^3 < 1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daher ist $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1/q > 1$ sowie $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q^3 < 1$, und das Quotientenkriterium liefert keine Entscheidung. Dagegen ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{q^{n+1}} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{q^{n-1}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1,$$

die Reihe konvergiert also absolut nach dem Wurzelkriterium. ■

Es gibt eine Vielzahl weiterer Konvergenzkriterien. Beispielsweise gilt

Satz 5.13 (Raabesches Kriterium)

(a) *Für alle hinreichend großen n sei $a_n \neq 0$ und $|\frac{a_n}{a_{n-1}}| \leq 1 - \frac{c}{n}$ mit einer Konstanten $c > 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut konvergent.*

(b) *Für alle hinreichend großen n sei $a_n > 0$ und $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ divergent.*

Einen Beweis finden Sie in Barner/Flohr S. 163. Mit diesem Satz lässt sich z.B. die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ und die Divergenz von $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ nachprüfen, was mit dem Wurzelkriterium nicht gelingt.

Satz 5.14 (Cauchyscher Verdichtungssatz) *Ist $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ für alle n, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ genau dann, wenn die „verdichtete“ Reihe $\sum_{n=0}^\infty 2^n a_{2^n}$ konvergiert. Im Konvergenzfall ist also $\lim 2^n a_{2^n} = 0$.*

Einen Beweis sollen Sie in der Übung finden. Dieser Satz zeigt auf einfache Weise ($\nearrow$ Übung), dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^r} \quad \text{mit } r > 1$$

konvergiert.

5.3 Umordnung von Reihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ (d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit den Gliedern $b_n = a_{\sigma(n)}$) heißt *Umordnung* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *unbedingt konvergent*, wenn sie konvergiert und wenn auch jede Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert und die gleiche Summe wie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hat. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht unbedingt konvergent, so heißt sie *bedingt konvergent*.

Beispiel Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ konvergiert nach dem Leibniz–Kriterium, und wegen

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ist die Summe dieser Reihe positiv. (Diese Summe ist $\ln 2$.) Wir definieren eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$ durch

n	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	$3m-2$	$3m-1$	$3m$	$\ldots$
$\sigma(n)$	1	3	2	5	7	4	$\ldots$	$4m-3$	$4m-1$	$2m$	$\ldots$.

Die entsprechende umgeordnete Reihe ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

Nun ist

$$\begin{array}{rcllllllllll}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n & = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{9} & -\ldots \\
\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n & = & 0 & +\frac{1}{2} & +0 & -\frac{1}{4} & +0 & +\frac{1}{6} & +0 & -\frac{1}{8} & +0 & +\ldots \\
\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n & = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{9} & +\ldots \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.
\end{array}$$

Die umgeordnete Reihe konvergiert also ebenfalls. Ihre Summe $\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist aber wegen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 0$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verschieden. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist also nur bedingt konvergent. ■

Satz 5.15 *Eine Reihe komplexer Zahlen ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.*

Beweis *1. Schritt* Sei zunächst $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Wir zeigen, dass die Reihe unbedingt konvergent ist. Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, und seien

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$$

die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw. der Umordnung dieser Reihe. Beide Folgen (s_n) und (σ_n) sind monoton wachsend. Sei $s := \sup s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Dann ist s eine obere Schranke für $\{S_m : m \in \mathbb{N}\}$. Um dies einzusehen, definieren wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein n durch

$$n := \max\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}.$$

Dann kommen alle Summanden von S_m auch in s_n vor, und es ist in der Tat

$$S_m \leq s_n \leq s \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Die Folge (S_m) ist also nach oben beschränkt und folglich konvergent. Für ihren Grenzwert S gilt wegen (5.5) $S \leq s$.
Wenn wir diese Überlegung wiederholen, dabei aber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ betrachten (die entsprechende Bijektion ist die Umkehrabbildung σ^{-1} zu σ), so gelangen wir zur Ungleichung $s \leq S$. Also ist $s = S$.
2. Schritt Sei nun $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Für jede *reelle* Zahl a definieren wir

$$a^+ := \max\{a, 0\} \quad \text{und} \quad a^- := \max\{-a, 0\}.$$

Offenbar gilt $a = a^+ - a^-$ für jedes $a \in \mathbb{R}$. Jede komplexe Zahl $a = b + ic$ mit $b, c \in \mathbb{R}$ kann nun geschrieben werden als $a = (b^+ - b^-) + i(c^+ - c^-)$. In diesem Sinn schreiben wir

$$a_n = b_n + ic_n = (b_n^+ - b_n^-) + i(c_n^+ - c_n^-) \quad \text{mit } b_n^\pm, c_n^\pm \geq 0.$$

Aus $|b_n| = |\operatorname{Re} a_n| \leq |a_n|$ folgt, dass $\sum |a_n|$ eine konvergente Majorante für $\sum b_n$ ist. Also konvergiert diese Reihe $\sum b_n$ absolut. Weiter ist $|b_n^+| \leq |b_n|$, so dass auch die Reihe $\sum b_n^+$ absolut konvergiert. Analog erhält man die absolute Konvergenz der Reihen $\sum b_n^-$, $\sum c_n^+$ und $\sum c_n^-$. Diese Reihen haben ausschließlich nichtnegative Glieder und können demzufolge nach Schritt 1 umgeordnet werden, ohne etwas an ihren Summen zu ändern. Für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt also

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum b_n^+ - \sum b_n^- + i \sum c_n^+ - i \sum c_n^- \\ &= \sum b_{\sigma(n)}^+ - \sum b_{\sigma(n)}^- + i \sum c_{\sigma(n)}^+ - i \sum c_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Jede absolut konvergente Reihe ist also unbedingt konvergent.
3. Schritt Sei nun $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen, die nicht absolut konvergiert. Aus Satz 4.13 folgt, dass dann auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ konvergieren, aber wenigstens eine dieser Reihen konvergiert nicht absolut. Die absolute Konvergenz jeder dieser beiden Reihen würde nämlich

wegen $|a_n| \leq |\mathrm{Re}\, a_n| + |\mathrm{Im}\, a_n|$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ erzwingen. Wenn wir zeigen können, dass jede konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe *reeller* Zahlen eine Umordnung besitzt, deren Summe nicht mit der Summe der ursprünglichen Reihe übereinstimmt, dann ist klar, dass auch die Reihe $\sum a_n$ nicht unbedingt konvergent sein kann. Diese Behauptung formulieren wir als einen eigenständigen Satz, dessen Beweis den Beweis von Satz 5.15 abschließt. ■

Satz 5.16 (Riemannscher Umordnungssatz) *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann gibt es für jede Zahl $S \in \mathbb{R}$ eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergiert und ihre Summe gleich S ist.*

Beweisidee Sei (p_n) die Folge, die aus (a_n) durch Streichen aller negativen Glieder entsteht, und (q_n) sei die Folge, die entsteht, wenn in (a_n) alle nichtnegativen Glieder gestrichen werden und die übrigbleibenden Zahlen mit -1 multipliziert werden. Dann sind (p_n) und (q_n) Folgen nichtnegativer Zahlen, und in einem ersten Beweisschritt macht man sich klar, dass jede der Reihen $\sum p_n$ und $\sum q_n$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert

Ist dies geschehen, konstruiert man die gesuchte Umordnung wie folgt: man wählt k_0 als kleinste natürliche Zahl mit

$$\sum_{n=0}^{k_0} p_n > S.$$

Dann wählt man k_1 als kleinste natürliche Zahl mit

$$\sum_{n=0}^{k_0} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n < S.$$

Anschließend wählt man k_2 als kleinste natürliche Zahl größer als k_0 mit

$$\sum_{n=0}^{k_0} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n + \sum_{n=k_0+1}^{k_2} p_n > S.$$

usw. Die gesuchte Umordnung $(a_{\sigma(n)})$ von (a_n) ist dann die Folge

$$(p_0, p_1, \ldots, p_{k_0}, -q_0, -q_1, \ldots, -q_{k_1}, p_{k_0+1}, p_{k_0+2}, \ldots, p_{k_2}, -q_{k_1+1}, \ldots).$$

In der Tat, für $k_{2m} \leq n < k_{2m+1}$ unterscheidet sich die n Partialsumme der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ höchstens um $p_{k_{2m}}$ von S, und für $k_{2m+1} \leq n < k_{2m+2}$ unterscheiden die n. Partialsumme und S höchstens um $q_{k_{2m+1}}$. Da (p_n) und (q_n) nach dem notwendigen Konvergenzkriterium Nullfolgen sind, folgt die Konvergenz der umgeordneten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ gegen S. ■

5.4 Produkte von Reihen

Das Produkt der beiden endlichen Summen $a_0 + \ldots + a_n$ und $b_0 + \ldots + b_m$ ist gleich der Summe über alle Produkte $a_i b_i$ mit $0 \leq i \leq n$ und $0 \leq j \leq m$. Analog entstehen beim formalen Multiplizieren der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ die Produkte

$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \ldots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & . \end{array} \tag{5.6}$$

Es ist keineswegs offensichtlich, wie diese Produkte in einer "neuen Reihe" $\sum c_n$, dem Produkt von $\sum a_n$ mit $\sum b_n$, angeordnet werden sollen. Falls jedoch beide Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergieren, dann kommt es auf die Art der Anordnung der Produkte 5.6 überhaupt nicht an. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 5.17 *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, und die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ durchlaufe die Menge der Produkte in* (5.6) *(genauer: Die Folge (c_n) stellt eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf die Menge der Produkte in* (5.6) *her). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big). \tag{5.7}$$

Beweis Wir zeigen zuerst die absolute Konvergenz der Reihe $\sum c_n$. Dazu bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit ℓ_n die kleinste natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft: alle Folgenglieder $c_0, \ldots, c_n$ kommen unter den Produkten $a_k b_m$ mit $k \leq \ell_n$ und $m \leq \ell_n$ vor. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \sum_{k=0}^{\ell_n} \sum_{m=0}^{\ell_n} |a_k b_m| = \Big(\sum_{k=0}^{\ell_n} |a_k|\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\ell_n} |b_m|\Big) \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|\Big).$$

Die rechte Seite dieser Abschätzung ist nach Voraussetzung endlich, also konvergiert die Reihe $\sum c_n$ absolut. Wir zeigen nun noch die Produktformel (5.7). Nach Satz 5.15 ist die Reihe $\sum c_n$ unbedingt konvergent und kann beliebig umgeordnet werden. Insbesondere können wir für (c_n) eine Folge wählen, die die Produkte

(5.6) wie folgt durchläuft:

$$
\begin{array}{ccccccc}
c_0 & - & c_1 & & c_8 & - & c_9 \\
 & & | & & | & & | \\
c_3 & - & c_2 & & c_7 & & c_{10} \\
| & & & & | & & | \\
c_4 & - & c_5 & - & c_6 & & c_{11} \\
 & & & & & & | \\
c_{15} & - & c_{14} & - & c_{13} & - & c_{12} \\
| & \dots & & & & & .
\end{array}
$$

Bei dieser Art des Durchlaufens gilt für die Partialsummen $s_{n^2-1} := \sum_{n=0}^{n^2-1} c_n$:

$$
s_{n^2-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} a_k b_m = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Big) \Big(\sum_{m=0}^{n-1} b_m \Big) .
$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert die Behauptung (5.7). $\blacksquare$

Für Produkte von Potenzreihen, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen, ist eine andere Variante des Durchlaufens der Produkte (5.6) besonders interessant:

$$
\begin{array}{ccccccc}
c_0 & & c_1 & & c_3 & & c_6 \\
 & / & & / & & / & \\
c_2 & & c_4 & & c_7 & & \\
 & / & & / & & & \\
c_5 & & c_8 & & & & \dots \\
 & / & & & & & \\
c_9 & & & & & & .
\end{array}
$$

Nach Setzen von Klammern führt dies auf die Reihe

$$
\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{5.8}
$$

Für beliebige Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nennt man die durch (5.8) erklärte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ mit $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ das *Cauchy–Produkt* von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Da es sich dabei nur um ein spezielles Durchlaufen der Produkte (5.6) handelt, liefert Satz 5.17 sofort:

Folgerung 5.18 *Sind* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergente Reihen, so ist auch ihr Cauchy–Produkt* $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Aussage von Folgerung 5.18 nicht mehr gilt, wenn die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht absolut konvergieren.

Beispiel Für $n \geq 1$ seien $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Nach dem Leibniz–Kriterium konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, aber sie konvergieren nicht absolut, da die harmonische Reihe eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist. Das allgemeine Glied des Cauchyprodukts $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ lautet

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}.$$

Es ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 1 - \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) - \Big(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\Big) + \ldots.$$

Nun ist für jedes $n \geq 1$ und jedes natürliche k zwischen 1 und n

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} \geq \frac{2}{n+1}. \tag{5.9}$$

Um dies einzusehen, formen wir äquivalent um:

$$\sqrt{k(n+1-k)} \leq \frac{n+1}{2},$$

und das ist nichts anderes als die bekannte Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel der Zahlen k und $n+1-k$. Aus (5.9) folgt nun

$$|d_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \geq 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergiert also nach dem notwendigen Konvergenzkriterium.
■

6 Stetige Funktionen

Zahlreiche Naturvorgänge lassen sich durch Abbildungen (von nun an sagen wir meist *Funktionen*) mit folgender Eigenschaft beschreiben: kleine Änderungen des Argumentes bewirken auch nur kleine Änderungen des Funktionswertes. Wir werden diese Eigenschaft präzisieren und gelangen so zum Begriff der Stetigkeit.

6.1 Stetige Funktionen

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und f eine Funktion von X nach Y.

Definition 6.1 (*a*) *Die Funktion f heißt* stetig im Punkt $x^* \in X$, *wenn für jede gegen x^* konvergierende Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ aus X gilt: die Folge $(f(x_n))_{n\geq 0}$ der Funktionswerte konvergiert in Y, und ihr Grenzwert ist $f(x^*)$:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

(*b*) *Die Funktion f heißt* stetig auf X, *wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.*

Die Stetigkeit in einem Punkt lässt sich wie folgt charakterisieren.

Satz 6.2 *Die Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x^* \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x^*) < \delta$ gilt: $d_Y(f(x), f(x^*)) < \varepsilon$.*

In Kurzfassung lautet diese Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x^*) : \quad f(x) \in U_\varepsilon\Big(f(x^*)\Big) \tag{6.1}$$

oder noch kürzer

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f\Big(U_\delta(x^*)\Big) \subseteq U_\varepsilon\Big(f(x^*)\Big).$$

Beweis ($\Longrightarrow$) Wir führen diesen Teil des Beweises indirekt. Angenommen, f ist in x^* stetig, aber (6.1) ist verletzt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(x^*) : \quad f(x) \notin U_\varepsilon\Big(f(x^*)\Big).$$

Dies gilt für jedes $\delta > 0$. Wir können insbesondere $\delta = 1/k$ mit $k \geq 1$ wählen und erhalten für ein gewisses $\varepsilon > 0$

$$\forall k \geq 1 \quad \exists x_k \in U_{1/k}(x^*) : \quad f(x_k) \notin U_\varepsilon\Big(f(x^*)\Big).$$

Die x_k konvergieren also gegen x^*, die Funktionswerte $f(x_k)$ konvergieren jedoch nicht gegen $f(x^*)$ im Widerspruch zur Stetigkeit von f in x^*.

($\Longleftarrow$) Wir nehmen nun an, dass f die Bedingung (6.1) erfüllt, und (x_n) sei eine Folge mit Grenzwert x^*. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir δ gemäß (6.1). Wegen $\lim x_n = x^*$ finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$x_n \in U_\delta(x^*) \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wegen (6.1) ist dann für alle $n \geq N$ auch $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(x^*))$, d.h. die Folge $(f(x_n))$ konvergiert gegen $f(x^*)$. ■

Beispiele In den folgenden Beispielen ist $X = Y = \mathbb{R}$ mit dem üblichen Abstand.
(1) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

heißt *Polynom n. Grades*. Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Ist nämlich $x^* \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge, die gegen x^* konvergiert, so gilt nach Satz 4.4

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} f(x_k) &= \lim_{k\to\infty} (a_n x_k^n + a_{n-1} x_k^{n-1} + \ldots + a_1 x_k + a_0) \\
&= a_n (x^*)^n + a_{n-1}(x^*)^{n-1} + \ldots + a_1 x^* + a_0 = f(x^*).
\end{aligned}$$

(2) Die *Signumfunktion*

$$f(x) = \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

ist nur im Punkt $x^* = 0$ nicht stetig. Für die Folge (x_n) mit $x_n = 1/n$ gilt nämlich $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.
(3) Die *Dirichletfunktion*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x^* \in \mathbb{R}$ stetig. Ist nämlich x^* rational, so gibt es in jeder Umgebung von x^* irrationale Zahlen. Für jedes $\delta > 0$ gibt es also ein $x \in U_\delta(x^*)$ mit $|f(x) - f(x^*)| = 1$. Genauso sieht man, dass f auch in den irrationalen Punkten von $\mathbb{R}$ nicht stetig ist. ■

Eng verwandt mit dem Begriff der Stetigkeit ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion in einem Punkt.

Definition 6.3 *Sei x^* Häufungspunkt von $X' \subseteq X$ und $f : X' \backslash \{x^*\} \to Y$. Man sagt, dass der* Grenzwert von f an der Stelle x^* existiert, *wenn es ein $y^* \in Y$ gibt, so dass für jede konvergente Folge (x_n) aus $X' \backslash \{x^*\}$ mit Grenzwert x^* die Folge $\big(f(x_n)\big)$ gegen y^* konvergiert. In diesem Fall ist y^* eindeutig bestimmt, y^* heißt* Grenzwert *von f an der Stelle x^*, und man schreibt*

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = y^*.$$

Beachten Sie: Es ist nicht erforderlich, dass die Funktion f an der Stelle x^* erklärt ist.

Satz 6.4 *Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x^* \in X$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) x^* ist ein isolierter Punkt von X, oder

(b) x^* ist Häufungspunkt von X, der Grenzwert $\lim_{x \to x^*} f(x)$ existiert, und dieser Grenzwert stimmt mit $f(x^*)$ überein.

Beweis Die Implikation ($\Rightarrow$) folgt unmittelbar aus den Definitionen. Wir zeigen die Implikation ($\Leftarrow$).
Sei (x_n) eine Folge in X mit Grenzwert x^*. Falls x^* ein isolierter Punkt von X ist, so ist $x_n = x^*$ für alle hinreichend großen n und daher $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$. Sei also x^* ein Häufungspunkt von X. Ist die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq x^*$ endlich, so ist wieder $x_n = x^*$ für alle hinreichend großen n und damit auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$. Ist diese Menge dagegen unendlich, so können wir eine Teilfolge (x_{k_n}) von (x_n) auswählen, die genau die Elemente dieser Menge als ihre Werte annimmt. Diese Teilfolge liegt also in $X \backslash \{x^*\}$ und konvergiert gegen x^*. Wegen Bedingung (b) gilt dann $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x^*)$. Die übrigen (nicht für die Teilfolge ausgewählten) Glieder der Folge (x_n) sind gleich x^*. Damit ist klar, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$. ■

Satz 6.5 *Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig auf X, wenn das Urbild jeder in Y offenen Menge offen in X ist.*

Beweis Sei zunächst f stetig auf X und G offen in Y. Falls $f^{-1}(G) = \emptyset$, so ist $f^{-1}(G)$ offen (Satz 3.8). Sei also $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ und x^* ein beliebiger Punkt aus $f^{-1}(G)$. Dann ist $f(x^*) \in G$. Da G offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x^*)) \subseteq G$. Nach Satz 6.2 existiert zu diesem ε ein $\delta > 0$ so, dass $f(U_\delta(x^*)) \subseteq U_\varepsilon(f(x^*))$. Dann ist $U_\delta(x^*) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x^*)))$ und damit erst recht $U_\delta(x^*) \subseteq f^{-1}(G)$. Also ist $f^{-1}(G)$ offen.

Sei nun umgekehrt $f^{-1}(G)$ für jede in Y offene Menge G offen. Wir müssen zeigen, dass dann f auf X stetig ist. Sei $x^* \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon(f(x^*))$ in Y offen (Satz 3.9), und folglich ist $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x^*)))$ offen in X. Da x^* in diesem Urbild liegt, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(x^*) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x^*)))$. Dann ist aber $f(U_\delta(x^*)) \subseteq U_\varepsilon(f(x^*))$, d.h. f ist stetig an der Stelle x^*. Da x^* beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass er eine Charakterisierung der Stetigkeit bei alleiniger Kenntnis der offenen Mengen in X und Y erlaubt (beachten Sie die Anmerkung am Ende von Abschnitt 3). Er kann benutzt werden, um stetige Funktionen auf topologischen Räumen zu definieren.

Wir betrachten nun Verknüpfungen stetiger Funktionen.

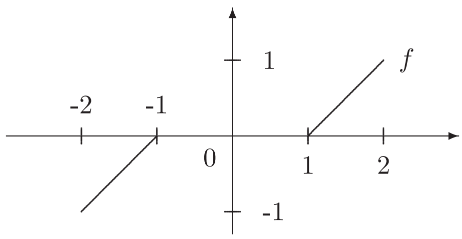
Satz 6.6 *Seien X, Y, Z metrische Räume, und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ seien Funktionen. Ist f in $x^* \in X$ stetig und g in $f(x^*) \in Y$ stetig, so ist die Funktion $g \circ f : X \to Z$ in x^* stetig.*

Beweis Sei (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x^*. Wegen der Stetigkeit von f in x^* konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x^*)$. Da g in $f(x^*)$ stetig ist, folgt die Konvergenz der Folge $(g(f(x_n)))$ gegen $g(f(x^*))$. ■

Man beachte aber: Ist $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Funktion, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ NICHT notwendig wieder stetig in $f(x^*)$!

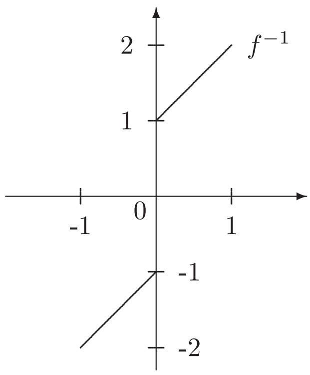
Beispiel Sei $X = [-2, -1) \cup [1, 2]$, $Y = [-1, 1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls} \quad x \in [-2, -1) \\ x-1 & \text{falls} \quad x \in [1, 2]. \end{cases}$$



Die Funktion f bildet X bijektiv auf Y ab und ist in jedem Punkt von X stetig. Die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ ist

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{falls} \quad x \in [-1, 0) \\ x+1 & \text{falls} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$



Diese ist offenbar an der Stelle $x^* = 0$ unstetig. ■

Wir geben später Bedingungen an, die die Stetigkeit der Umkehrfunktion einer stetigen Funktion garantieren.

6.2 Stetige Funktionen auf oder nach $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten nun Funktionen, die auf Teilmengen von $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ definiert sind oder in diese Räume abbilden.
Sei X ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{C}$. Unter der *Summe* $f + g$, dem *Produkt* fg und – falls $0 \notin g(X)$ – dem *Quotienten* f/g versteht man die auf X

durch

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{und} \quad (f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

erklärten Funktionen.

Satz 6.7 *Sind $f, g : X \to \mathbb{C}$ in $x^* \in X$ stetig, so sind auch $f+g, fg$ und – falls $0 \notin g(X)$ – f/g in x^* stetig.*

Dies folgt sofort aus dem entsprechenden Resultat für Grenzwerte (Satz 4.4). Die Summe $f+g$ lässt sich natürlich auch für Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ erklären, und die erste Aussage von Satz 6.7 gilt entsprechend.

Sind $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome, so heißt die auf $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$ definierte Funktion P/Q *rational*. Als Folgerung aus Satz 6.7 erhält man sofort die Stetigkeit rationaler Funktionen auf ihrem natürlichen Definitionsgebiet.

Als nächstes vermerken wir ein nützliches hinreichendes Kriterium für Stetigkeit.

Definition 6.8 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$ heißt* Lipschitzstetig *in $x^* \in D$, wenn es eine reelle Konstante C und eine Umgebung $U_\varepsilon(x^*)$ so gibt, dass*

$$\|f(x) - f(x^*)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C\|x - x^*\|_{\mathbb{R}^n} \quad \textit{für alle} \quad x \in U_\varepsilon(x^*) \cap D. \tag{6.2}$$

Jedes solche C heißt eine lokale Lipschitzkonstante.

Satz 6.9 *Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$ in $x^* \in D$ Lipschitzstetig, so ist f in x^* stetig.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen. Man kann den Begriff der Lipschitzstetigkeit für Abbildungen zwischen beliebigen metrischen Räumen einführen, indem man an Stelle von (6.2) fordert

$$d_Y\Big(f(x), f(x^*)\Big) \leq C\, d_X(x, x^*) \quad \text{für alle} \quad x \in U_\varepsilon(x^*) \cap D.$$

Satz 6.9 gilt entsprechend auch in dieser Situation.

Beispiele **(1)** Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ ist global Lipschitzstetig. Wegen der Dreiecksungleichung gilt nämlich für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \leq \|x - y\| \quad \text{bzw.} \quad |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|,$$

d. h. $C = 1$ ist eine von x unabhängige Lipschitzkonstante.

(2) Wir zeigen, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ im Punkt 0 nicht Lipschitzstetig ist. Wäre f Lipschitzstetig in 0, so gäbe es ein $C > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq C|x - 0| \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{x} \leq Cx \quad \text{für alle} \quad x \in [0, \varepsilon).$$

Für hinreichend großes n liegen die Zahlen $\frac{1}{n^2}$ in $[0, \varepsilon)$, und es müsste gelten:

$$\sqrt{1/n^2} \leq C/n^2 \quad \text{bzw.} \quad n \leq C \quad \text{für alle großen } n.$$

Dies ist offenbar unmöglich ($\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt). Die Funktion f ist aber stetig in 0. Um dies einzusehen, müssen wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass $0 \leq \sqrt{x} < \varepsilon$ für alle $0 \leq x < \delta$. Jede Wahl von $\delta < \varepsilon^2$ leistet dies. Dieses Beispiel zeigt, dass Lipschitzstetigkeit eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit ist. ■

Wir betrachten nun Funktionen auf $\mathbb{R}$ genauer. Für jeden Punkt $x^* \in \mathbb{R}$ gibt es im wesentlichen zwei Möglichkeiten, sich diesem Punkt zu nähern: von links (oder unten) oder von rechts (oder oben). Dementsprechend definiert man:

Definition 6.10 *Sei Y ein metrischer Raum, $f : \mathbb{R} \supseteq D \to Y$, und $x^* \in \mathbb{R}$ sei ein Häufungspunkt der Menge $D_l := \{x \in D : x < x^*\}$. Man sagt, dass der* linksseitige Grenzwert von f an der Stelle x^* existiert*, wenn es ein $y^* \in Y$ gibt, so dass für jede Folge (x_n) in D_l mit Grenzwert x^* gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y^*$. Dann heißt y^* auch der* linksseitige Grenzwert von f an der Stelle x^**, und man schreibt $\lim_{x\to x^*-0} f(x) = y^*$ oder $\lim_{x\nearrow x^*} f(x) = y^*$ oder auch $f(x^* - 0) = y^*$.*

Analog definiert man den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle x^*.

Definition 6.11 *Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to Y$, und $x^* \in D$ sei ein Häufungspunkt von $D_l := \{x \in D : x < x^*\}$. Dann heißt f* linksseitig stetig *oder* stetig von links in x^**, wenn*

$$\lim_{x\to x^*-0} f(x) = f(x^*).$$

Die Stetigkeit von rechts wird analog definiert. Der Beweis des folgenden Satzes ergibt sich wieder leicht aus den Definitionen und ist HA.

Satz 6.12 *Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to Y$, und $x^* \in D$ sei Häufungspunkt jeder der Mengen $D_l := \{x \in D : x < x^*\}$ und $D_r := \{x \in D : x > x^*\}$. Dann ist f genau dann stetig in x^*, wenn f in x^* sowohl links– als auch rechtsseitig stetig ist.*

Wir sehen uns nun einige Typen von Unstetigkeiten genauer an. Der Einfachheit halber sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $x^* \in (a, b)$. Wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x^*-0} f(x)$ und $\lim_{x\to x^*+0} f(x)$ existieren und voneinander verschieden sind, so heißt x^* *Sprungstelle* (manchmal auch Unstetigkeitsstelle 1. Art). Falls diese beiden Grenzwerte gleich sind, aber nicht mit $f(x^*)$ übereinstimmen, heißt x^* eine *hebbare Unstetigkeit*. In diesem Fall kann man durch

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \neq x^* \\ \lim\limits_{x\to x^*-0} f(x) & \text{falls} \quad x = x^* \end{cases}$$

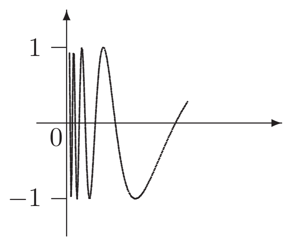
eine neue Funktion erklären, die auf $(a,b)\backslash\{x^*\}$ mit f übereinstimmt und in x^* stetig ist. Unstetigkeitsstellen, die weder hebbar noch Sprünge sind, fasst man oft unter Unstetigkeitsstellen 2. Art zusammen.

Beispiele (1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ \quad 1 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}$$

besitzt an der Stelle 1 eine hebbare Unstetigkeit. Für $x \neq 1$ ist nämlich $f(x) = x + 1$ und daher $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.
(2) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto \operatorname{sgn} x$ hat bei $x^* = 0$ eine Sprungstelle.
(3) Für jede reelle Zahl x bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner als oder gleich x ist. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto [x]$ ist in jedem ganzzahligen Punkt unstetig und besitzt dort eine Sprungstelle.
(4) Die Dirichletfunktion hat in jedem Punkt eine Unstetigkeit 2. Art.
(5) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ \quad 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$



besitzt in $x^* = 0$ eine Unstetigkeit 2. Art. ■

Eine Funktion $f : [a,b] \to Y$ heißt *stückweise stetig*, wenn es endlich viele Zahlen $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ gibt so, dass f auf jedem Intervall (a_i, a_{i+1}) stetig ist und in allen Punkten a_i alle einseitigen Grenzwerte von f existieren. Die Funktionen aus den Beispielen **(2)** und **(3)** sind stückweise stetig.

Schließlich sei darauf hingewiesen, dass die Betrachtung von Grenzwerten "in eine bestimmte Richtung" auch nützlich ist bei Funktionen mehrerer Veränderlicher. Als Beispiel fragen wir uns, ob die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \\ \quad 0 & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig in $(0,0)$ ist. Dazu lassen wir für jedes feste $\alpha \in \mathbb{R}$ den Punkt (x,y) entlang der Geraden $y = \alpha x$ gegen $(0,0)$ streben:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=\alpha x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^2}{x^2+\alpha^2 x^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Das Resultat hängt offenbar von der Richtung ab, in der wir uns dem Punkt $(0,0)$ genähert haben. Also ist f nicht stetig in $(0,0)$.

Oft möchte man das Verhalten einer Funktion f bei Annäherung an einen Punkt x_0 genauer beschreiben. Dies kann geschehen durch Vergleich mit einer anderen Funktion. Dazu treffen wir folgende Vereinbarungen. Es sei $\overline{\mathbb{R}}$ die um die Punkte $\pm\infty$ erweiterte Zahlengerade. Jede Menge der Gestalt $[-\infty, s) := (-\infty, s) \cup \{-\infty\}$ mit $s \in \mathbb{R}$ heißt eine *Umgebung* von $-\infty$, und jede Menge der Gestalt $(s, \infty] := (s, \infty) \cup \{\infty\}$ mit $s \in \mathbb{R}$ eine *Umgebung* von $+\infty$. Ist U eine Umgebung von $x \in \overline{\mathbb{R}}$, so heißt $U \backslash \{x\}$ eine *punktierte Umgebung* von x.

Definition 6.13 *Sei $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, und seien f und g reellwertige Funktionen, die auf einer punktierten Umgebung $\dot{U}(x_0)$ von x_0 definiert sind. Ferner sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \dot{U}(x_0)$. Man vereinbart folgende Symbolik:*

- $f(x) = O\Big(g(x)\Big)$ $(x \to x_0)$ *bedeutet:*

  $\exists C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C|g(x)|$ *für alle x aus einer punktierten Umgebung von x_0.*

- $f(x) = o\Big(g(x)\Big)$ $(x \to x_0)$ *bedeutet:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad \textit{für } x \to x_0.$$

- $f(x) \simeq g(x)$ $(x \to x_0)$ *bedeutet:*

  $\exists c, C \in (0, \infty) : c|g(x)| \leq |f(x)| \leq C|g(x)|$ *für alle x aus einer punktierten Umgebung von x_0.*

- $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$ *bedeutet:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad \textit{für } x \to x_0.$$

Man liest dies der Reihe nach als: f ist groß O von g, f ist klein o von g, f ist von gleicher Ordnung wie g, und f und g sind asymptotisch gleich.

Ist schließlich h eine in $\dot{U}(x_0)$ definierte reellwertige Funktion, so vereinbart man die Schreibweisen

$$f(x) = h(x) + O\Big(g(x)\Big) \quad (x \to x_0)$$

für $f(x) - h(x) = O\Big(g(x)\Big)$ $\quad (x \to x_0)$ *und*

$$f(x) = h(x) + o\Big(g(x)\Big) \quad (x \to x_0)$$

für $f(x) - h(x) = o\Big(g(x)\Big)$ $\quad (x \to x_0)$.

Beispiele (1) $f(x) = O(1)\,(x \to x_0)$ bedeutet $|f(x)| \le C \cdot 1$ für $x \in \dot{U}(x_0)$, d.h. f ist in einer punktierten Umgebung von x_0 beschränkt. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \sin x &= O(1) \quad (x \to \infty), \\ \sin x &= O(1) \quad (x \to 0), \\ \frac{1}{x} &= O(1) \quad (x \to \infty), \end{aligned}$$

aber $\frac{1}{x} \ne O(1)\,(x \to 0)$. ■

(2) $f(x) = o(1)(x \to x_0)$ bedeutet $f(x) \to 0$ für $x \to x_0$. Beispielsweise ist

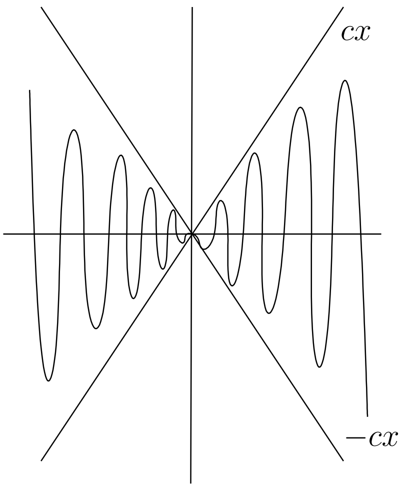
$$\sin x = o(1)\ (x \to 0), \qquad \sin x = x + o(1)\ (x \to 0)$$

$$\text{aber} \quad \sin x \ne o(1)\ (x \to \infty).$$ ■

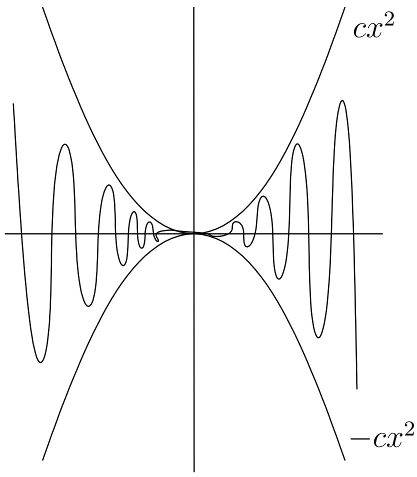
(3) $f(x) = O(x^n)(x \to x_0)$ bedeutet: es gibt ein reelles C so, dass $|f(x)| \le C|x|^n$ für alle $x \in \dot{U}(x_0)$. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \sin x &= O(x^2)\ (x \to \infty) \\ \sin x &= O(x^2)\ (x \to 1) \\ \text{aber} \quad \sin x &\ne O(x^2)\ (x \to 0). \end{aligned}$$

Für $n \ge 1$ ist $f(x) = O(x^n)(x \to \infty)$ eine Bedingung an das Wachstum $f(x)$ für $x \to \infty$, und $f(x) = O(x^n)(x \to 0)$ beschreibt, wie schnell $f(x)$ für $x \to 0$ gegen 0 strebt.



$f(x) = O(x)(x \to 0)$



$f(x) = O(x^2)(x \to 0)$

(4) Sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x. Tschebyscheff hat gezeigt

$$\pi(x) \simeq \frac{x}{\ln x} \quad (x \to \infty),$$

Hadamard und de la Vallée Poisson haben den *Primzahlsatz*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to \infty)$$

bewiesen, und eine große unbewiesene Vermutung der Zahlentheorie ist, dass

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O(\sqrt{x}) \quad (x \to \infty).$$

■

6.3 Potenzreihen in $\mathbb{C}$

Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, so kann man für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ betrachten. Diese Reihe heißt eine *Potenzreihe*, und die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die diese Reihe konvergiert, heißt ihr *Konvergenzbereich*. Ist D dieser Konvergenzbereich, so wird durch

$$D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine komplexwertige Funktion auf D festgelegt.

Beispiel Aus Beispiel 1 in Abschnitt 5.1 wissen wir, dass der Konvergenzbereich der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gleich $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist und dass auf dieser Menge gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

■

In diesem Beispiel ist der Konvergenzbereich eine Kreisscheibe. Ein ähnliches Resultat gilt für beliebige Potenzreihen. Vorbereitend zeigen wir:

Lemma 6.14 (a) *Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert, so konvergiert sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ absolut.*
(b) *Divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für ein $z_0 \neq 0$, dann divergiert sie für jedes z mit $|z| > |z_0|$.*

Beweis (a) Aus der Konvergenz an der Stelle z_0 und dem notwendigen Konvergenzkriterium folgt die Beschränktheit der Folge $(a_n z_0^n)$. Es gibt also ein M so, dass $|a_n z_0^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$. Wir schreiben z als λz_0 mit $|\lambda| < 1$. Wegen $|\lambda| < 1$ und

$$|a_n z^n| = |a_n \lambda^n z_0^n| = |\lambda^n|\,|a_n z_0^n| \leq M|\lambda|^n$$

ist die Reihe $M\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n$ eine konvergente Majorante für $\sum a_n z^n$. Nach dem Vergleichskriterium konvergiert $\sum a_n z^n$ absolut.
(b) Würde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für ein $|z| > |z_0|$ konvergieren, so würde nach Teil (a) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergieren. Widerspruch. ■

Folgerung 6.15 *Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für jedes $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut.*

Satz 6.16 *Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gibt es eine Kreisscheibe $K_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ mit folgender Eigenschaft: Liegt z im Innern von K_R (d.h. ist $|z| < R$), so konvergiert $\sum a_n z^n$ absolut; liegt z außerhalb von K_R (d.h. ist $|z| > R$), so divergiert $\sum a_n z^n$.*

Dabei lassen wir ausdrücklich folgende Grenzfälle zu:

$$R = 0 \Longleftrightarrow K_R = \{0\} \quad \text{und} \quad R = \infty \Longleftrightarrow K_R = \mathbb{C}.$$

Beweis Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und D ihr Konvergenzbereich. Offenbar ist stets $0 \in D$ und daher $D \neq \emptyset$.
Falls $D = \{0\}$ oder $D = \mathbb{C}$, so ist die Aussage des Satzes richtig (Folgerung 6.15). Sei also $\{0\} \overset{\text{echt}}{\subset} D \overset{\text{echt}}{\subset} \mathbb{C}$. Dann gibt es Punkte $z_0, z_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ so, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ divergiert. Die Menge

$$\mathcal{M} := \{r \in \mathbb{R} : \exists z \in D \quad \text{mit} \quad |z| = r\}$$

ist nach oben beschränkt (z.B. durch $|z_1|$) und enthält positive Zahlen (z.B. $|z_0|$). Also besitzt $\mathcal{M}$ ein positives und endliches Supremum, welches wir R nennen. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Nach Satz 1.13 gibt es ein $r \in \mathcal{M}$ so, dass $|z| < r \leq R$, d.h. es gibt ein $z_0 \in D$ mit $|z| < |z_0| \leq R$. Lemma 6.14 (a) liefert in diesem Fall die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Sei nun noch $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Würde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergieren, so wäre $|z| \in \mathcal{M}$ und daher $|z| \leq R$, ein Widerspruch. ■

Die "Zahl" $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ aus Satz 6.16 ist eindeutig bestimmt und heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Satz 6.17 (Formel von Cauchy/Hadamard) *Für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gilt:*

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}.$$

Wir vereinbaren:

$$R = 0 \text{ falls } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \text{ und } R = \infty \text{ falls } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Beweis Sei zunächst $0 < \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Wegen

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

liefert das Wurzelkriterium (Satz 5.11):

- für $|z| < (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ konvergiert $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ absolut.
- für $|z| > (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ divergiert $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$.

Also stimmt in diesem Fall $(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ mit dem Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ überein. Der Beweis im Fall $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \{0, \infty\}$ ist HA. ■

Folgerung 6.18 *Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^\infty n a_n z^n$ haben den gleichen Konvergenzradius.*

In der Tat, aus $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (nach Beispiel 3 aus 4.3) folgt

$$\limsup \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Satz 6.19 *Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion $z \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ auf $U_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ stetig.*

Beweis Wir wählen ein $r \in (0, R)$ und definieren $f(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ für $|z| \leq r$. Wir schätzen zunächst $|f(z) - f(z_0)|$ für beliebige z, z_0 mit $|z|, |z_0| \leq r$ nach oben ab. Mit der leicht nachzurechnenden Identität

$$z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \qquad (n \geq 1)$$

finden wir:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \Big| \sum_{n=1}^\infty a_n (z^n - z_0^n) \Big| = \Big| (z - z_0) \sum_{n=1}^\infty a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \Big| \\ &\leq |z - z_0| \sum_{n=1}^\infty |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k |z_0|^{n-1-k} \\ &\leq |z - z_0| \sum_{n=1}^\infty |a_n|\, n \cdot r^{n-1} \qquad (\text{wegen} \quad |z|, |z_0| \leq r). \end{aligned}$$

Nach Folgerung 6.18 besitzt die Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty |a_n|\, n \cdot z^n$ den gleichen Konvergenzradius R wie die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$. Wegen $r < R$ ist also auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$ konvergent. Bezeichnen wir ihre Summe mit C, so folgt

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C|z - z_0| \quad \text{für alle } |z|, |z_0| \leq r.$$

Die Funktion f ist also Lipschitzstetig in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < R$ und insbesondere stetig auf $U_R(0)$ (Satz 6.9). ■

In den Bezeichnungen von Satz 6.19 gilt für jedes z_0 mit $|z_0| < R$:

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = \sum_{n=0}^\infty a_n z_0^n = \sum_{n=0}^\infty a_n (\lim_{z \to z_0} z)^n.$$

Man darf in dieser speziellen Situation also die beiden Grenzprozesse $\lim_{z\to z_0}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}$ vertauschen. Aussagen über die Vertauschbarkeit von Grenzprozessen sind für die Analysis außerordentlich wichtig und werden uns noch oft begegnen.

Satz 6.20 *Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n + O(x^{k+1}) \ (x \to 0).$$

Der Beweis ist Hausaufgabe.

Wir sehen uns noch das Produkt von Potenzreihen an. Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen, die beide auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ mit $r > 0$ konvergieren, so konvergieren sie dort absolut (Satz 6.16), und wir können nach Satz 5.17 das Produkt $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)$ bilden, indem wir alle Produkte $a_n z^n b_k z^k = a_n b_k z^{n+k}$ bilden und diese in beliebiger Reihenfolge aufsummieren. Zweckmäßigerweise wird man dieses Aufsummieren so organisieren, dass man Summanden mit gleichem Exponenten bei z zusammenfasst:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) \\
&= a_0 b_0 z^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n =: \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.
\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ist offenbar gerade das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Sie konvergiert nach Satz 5.17 absolut für $|z| < r$.

6.4 Einige spezielle Funktionen

6.4.1 Die Exponentialfunktion

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut, wie man mit dem Quotientenkriterium sofort überprüft:

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \frac{|z^{n+1}|\, n!}{(n+1)!|z^n|} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Die somit auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt die *Exponentialfunktion* und wird mit exp bezeichnet. Nach Satz 6.19 ist diese Funktion stetig auf $\mathbb{C}$. Außerdem gilt offenbar $\exp 0 = 1$ sowie $\exp 1 = e$ nach Beispiel 3 aus Abschnitt 5.1.

Satz 6.21 *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$.*

Beweis Zur Multiplikation der Reihen $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und $\exp w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ benutzen wir das Cauchyprodukt. Beide Reihen konvergieren ja auf ganz $\mathbb{C}$ absolut, so dass es auf die Reihenfolge des Zusammenfassens der Summanden $\frac{z^n}{n!} \cdot \frac{w^k}{k!}$ nicht ankommt. Es ist also

$$\begin{aligned}
\exp z \cdot \exp w &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w).
\end{aligned}$$

■

Folgerung 6.22 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp z \neq 0$.*

Es ist nämlich $\exp z \cdot \exp(-z) = \exp 0 = 1$. ■

Folgerung 6.23 *Für alle rationalen Zahlen $r = m/n$ (mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$) ist*

$$\exp r = e^r = \sqrt[n]{e^m}.$$

Beweis Aus Satz 6.21 folgt $\exp(mz) = (\exp z)^m$ für alle $m \geq 1$. Für $m = 0$ ist diese Aussage offenbar ebenfalls richtig, und für $m < 0$ haben wir wegen $\exp(mz) \cdot \exp(-mz) = 1$

$$\exp(mz) = \frac{1}{\exp(-mz)} = \frac{1}{(\exp z)^{-m}} = (\exp z)^m.$$

Es ist also $\exp(mz) = (\exp z)^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Insbesondere haben wir $\exp m = (\exp 1)^m = e^m$ und $e = \exp 1 = \exp \frac{n}{n} = (\exp \frac{1}{n})^n$, also $\exp \frac{1}{n} = e^{1/n} = \sqrt[n]{e}$. Wir erhalten damit

$$\exp r = \exp \frac{m}{n} = \Big(\exp \frac{1}{n}\Big)^m = \Big(\sqrt[n]{e}\Big)^m = e^{m/n} = e^r.$$ ■

Da $\exp r = e^r$ für alle rationalen Zahlen gilt, wählt man häufig e^z statt $\exp z$ als Bezeichnung für die Exponentialfunktion.

Folgerung 6.24 *Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ ist $e^{x_1} < e^{x_2}$.*

Beweis Für die positive Zahl $y := x_2 - x_1$ gilt

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots > 1.$$

Also ist $e^{x_2 - x_1} = e^{x_2} e^{-x_1} = e^{x_2}/e^{x_1} > 1$ und folglich $e^{x_2} > e^{x_1}$. ■

6.4.2 Die trigonometrischen Funktionen

Die Potenzreihen $\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ und $\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut (Quotientenkriterium) und definieren die *Sinus*– bzw. *Kosinusfunktion* auf $\mathbb{C}$. Beide Funktionen sind nach Satz 6.5 stetig auf $\mathbb{C}$. Durch Einsetzen der entsprechenden Potenzreihen überprüft man, dass

$$\cos z = \frac{1}{2}\Big(\exp(iz) + \exp(-iz)\Big) \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{1}{2i}\Big(\exp(iz) - \exp(-iz)\Big) \tag{6.3}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Durch Addition folgt aus (6.3) die *Eulersche Formel*

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Durch Kombination dieser Formel mit der Beziehung $\exp(nz) = (\exp z)^n$ erhält man die *Formel von Moivre*

$$(\cos z + i \sin z)^n = \exp(niz) = \cos(nz) + i \sin(nz) \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

die u.a. die Grundlage für das Wurzelziehen im Bereich der komplexen Zahlen bildet.

Wir suchen alle n-te Wurzeln aus einer gegebenen komplexen Zahl

$$w = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \neq 0,$$

d.h. alle Zahlen $z = s(\cos\psi + i \sin\psi)$ mit $z^n = w$. Nach Moivre ist

$$z^n = s^n\big(\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)\big) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

und Vergleich von Betrag und Argument liefert $s^n = r$, also $s = \sqrt[n]{r}$, sowie $n\psi = \varphi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Argumente $\psi_k := \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ nehmen nur für $k = 0, \ldots, n-1$ verschiedene Werte an. Es gibt also genau n n-te Wurzeln aus $w \neq 0$, nämlich

$$z_k := \sqrt[n]{r}\Big(\cos\big(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\big) + i \sin\big(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\big)\Big)$$

mit $k = 0, \ldots, n-1$. Diese liegen auf dem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{r}$ um 0 und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

Außerdem folgt unmittelbar aus den Definitionen

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos z = \cos(-z), \quad \sin z = -\sin(-z).$$

Funktionen f mit der Eigenschaft $f(z) = f(-z)$ bzw. $f(z) = -f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ oder $z \in \mathbb{R}$ heißen auch *gerade* bzw. *ungerade*.

Satz 6.25 *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die* Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(z \pm w) &= \cos z \cos w \mp \sin z \sin w, \\ \sin(z \pm w) &= \sin z \cos w \pm \cos z \sin w. \end{aligned}$$

Beweis Der Beweis kann wie der von Satz 6.21 durch Multiplikation der entsprechenden Potenzreihen geführt werden. Einfacher ist es, den Satz 6.21 und die Identitäten (6.3) zu benutzen. So ist beispielsweise

$$\begin{aligned} &\cos z \cos w - \sin z \sin w \\ &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}) - \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) \\ &= \frac{1}{4}\Big[(e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}) + \\ &\quad (e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)})\Big] \\ &= \frac{1}{2}(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) = \cos(z+w). \end{aligned}$$

■

Aus den Additionstheoremen erhält man eine Vielzahl weiterer Beziehungen zwischen Sinus– und Kosinusfunktionswerten. Gleichsetzen von z und w ergibt die für alle $z \in \mathbb{C}$ gültigen Identitäten

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z &= 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z, \\ \sin(2z) &= 2 \sin z \cos z \end{aligned}$$

(wobei, wie üblich, $\cos^2 z$ für $(\cos z)^2$ steht). Außerdem gilt (HA):

$$\begin{aligned} \sin z \pm \sin w &= 2\cos\frac{z \mp w}{2} \sin\frac{z \pm w}{2}, \\ \cos z + \cos w &= 2\cos\frac{z + w}{2} \cos\frac{z - w}{2}, \\ \cos z + \cos w &= -2\sin\frac{z + w}{2} \sin\frac{z - w}{2}. \end{aligned}$$

Den *Tangens* und *Kotangens* von $z \in \mathbb{C}$ erklären wir durch

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Diese Definition ist natürlich nur für solche $z \in \mathbb{C}$ möglich, für die $\cos z$ bzw. $\sin z$ ungleich 0 sind. Über die Nullstellen der Sinus– und Kosinusfunktion machen wir uns im nächsten Abschnitt Gedanken.

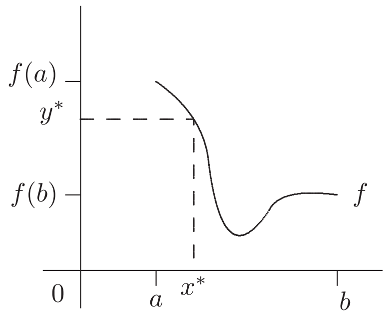
Schließlich definieren wir für $z \in \mathbb{C}$ die *Hyperbelfunktionen*

$$\begin{aligned} \sinh z &:= \frac{1}{2}\Big(\exp z - \exp(-z)\Big) = -i\sin(iz), \\ \cosh z &:= \frac{1}{2}\Big(\exp z + \exp(-z)\Big) = \cos(iz). \end{aligned}$$

6.5 Der Zwischenwertsatz

Für die weitere Untersuchung der trigonometrischen Funktionen benötigen wir folgendes Resultat.

Satz 6.26 (Zwischenwertsatz von Bolzano) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es für jede Zahl y^*, die echt zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt (d.h. es ist $f(a) < y^* < f(b)$ oder $f(b) < y^* < f(a)$) ein $x^* \in (a,b)$ mit $f(x^*) = y^*$.*



Beweis Wir führen den Beweis mit Hilfe einer Intervallschachtelung. Sei z.B. $f(b) > f(a)$. Wir definieren rekursiv für $k \geq 0$

$$I_0 := [a_0, b_0] \quad \text{mit} \quad a_0 = a,\ \ b_0 = b,$$

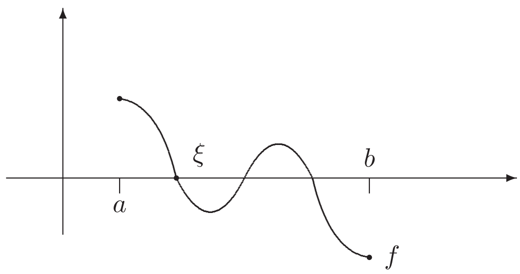
$$I_{k+1} := [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} \left[\dfrac{a_k + b_k}{2}, b_k\right] & \text{falls} \quad f\Big(\dfrac{a_k+b_k}{2}\Big) \leq y^* \leq f(b_k) \\ \left[a_k, \dfrac{a_k + b_k}{2}\right] & \text{falls} \quad f(a_k) \leq y^* < f\Big(\dfrac{a_k+b_k}{2}\Big). \end{cases}$$

Diese Intervalle sind ineinandergeschachtelt (d.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$ für alle k), und für ihre Längen gilt

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}\,(b_k - a_k) = \ldots = \frac{1}{2^{k+1}}\,(b_0 - a_0) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Nach dem Intervallschachtelungsatz gibt es genau eine reelle Zahl x^* mit $x^* \in I_k$ für alle k, und es gilt $x^* = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$. Da f stetig ist, haben wir außerdem $f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} f(b_k)$, und aus $f(a_k) \leq y^* \leq f(b_k)$ folgt nach Grenzübergang $k \to \infty$ sofort $f(x^*) = y^*$. Schließlich kann x^* wegen $f(a) < y^* < f(b)$ weder mit a noch mit b zusammenfallen. ∎

Folgerung 6.27 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f(a)f(b) < 0$. Dann gibt es eine Stelle $\xi^* \in (a,b)$ mit $f(\xi^*) = 0$.*



Mit Hilfe dieses Resultates können wir nun zeigen:

Satz 6.28 *Die Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$ besitzt genau eine Nullstelle im Intervall $(0,4]$.*

Beweis Es ist

$$\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} : \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \leq \begin{cases} 2^2/6 < 1 & \text{falls } x \in [0,2], \\ 4^2/20 < 1 & \text{falls } x \in [0,4],\ n \geq 1. \end{cases}$$

Auf $(0,4]$ ist also die Sinusfunktion durch eine alternierende Reihe mit monoton fallenden und gegen 0 konvergierenden Gliederbeträgen erklärt. Ähnliche Abschätzungen wie im Beweis des Leibniz–Kriteriums (Satz 5.5) liefern für $0 < x \leq 2$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!} = x\Big(1 - \frac{x^2}{6}\Big) \geq x\Big(1 - \frac{4}{6}\Big) > 0$$

und für $x = 4$:

$$\sin 4 < \frac{4}{1!} - \Big(\frac{4^3}{3!} - \frac{4^5}{5!}\Big) - \Big(\frac{4^7}{7!} - \frac{4^9}{9!}\Big) = -\frac{268}{405} < 0.$$

Nach Folgerung 6.27 hat die reelle Sinusfunktion also eine Nullstelle zwischen 2 und 4. Wir zeigen noch, dass diese Funktion höchstens eine Nullstelle in $(0,4]$ hat. Wie wir bereits gesehen haben, müssen alle diese Nullstellen in $(2,4)$ liegen. Angenommen, es gibt zwei solcher Nullstellen, d.h. es ist $2 < x_1 < x_2 < 4$ und $\sin x_1 = \sin x_2 = 0$. Nach den Additionstheoremen ist dann

$$\sin(x_2 - x_1) = \sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1 = 0,$$

d.h. auch $x_2 - x_1$ ist Nullstelle. Nun ist $0 < x_2 - x_1 < 2$, und auf dem Intervall $(0,2)$ ist die Sinusfunktion streng positiv. Widerspruch. ∎

Die in Satz 6.28 beschriebene Nullstelle nennen wir π. Eine näherungsweise Berechnung (z.B. über eine Intervallschachtelung wie im Beweis von Satz 6.26) ergibt $\pi \approx 3.14159\ldots$. Man kann beweisen, dass π nicht rational ist. Aus $\sin \pi = 0$ und

$\sin^2 \pi + \cos^2 \pi = 1$ folgt $|\cos \pi| = 1$. Da $\cos \pi$ reell ist, ist entweder $\cos \pi = 1$ oder $\cos \pi = -1$. Wäre $\cos \pi = 1$, so würde aus

$$1 = \cos \pi = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

folgen, dass $\sin \frac{\pi}{2} = 0$. Dies ist unmöglich, da $\frac{\pi}{2} < \pi$ und da π die kleinste positive Nullstelle der Sinusfunktion ist. Also ist $\cos \pi = -1$. Ähnlich findet man

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1\,, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

und mit den Additionstheoremen bekommt man sofort für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rclcrcl} \sin(z+\pi) &=& -\sin z, & \qquad & \cos(z+\pi) &=& -\cos z, \\ \sin(z+2\pi) &=& \sin z, & & \cos(z+2\pi) &=& \cos z, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) &=& \cos z, & & \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) &=& \mp \sin z. \end{array}$$

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) heißt *periodisch*, wenn es eine komplexe (oder reelle) Zahl $p \neq 0$ so gibt, dass $f(z+p) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$). Die Zahl p heißt dann eine *Periode* von f. Die Sinus– und Kosinusfunktion sind also periodisch auf $\mathbb{C}$, und 2π ist eine Periode für beide Funktionen. Wir vermerken noch eine Konsequenz der Eulerschen Formel:

$$e^{i\pi} = -1,$$

welche die 4 bemerkenswerten Zahlen $1, i, e, \pi$ miteinander verknüpft. Quadrieren dieser Gleichung liefert $e^{2\pi i} = 1$. Zusammen mit dem „Additionstheorem“, Satz 6.19, zeigt dies, dass

$$\exp z = \exp(z + 2\pi i) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die komplexe Exponentialfunktion ist also $2\pi i$–periodisch.

Satz 6.29 *Die komplexe Sinusfunktion hat ihre Nullstellen genau in den Punkten $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und die komplexe Kosinusfunktion hat ihre Nullstellen genau in den Punkten $(k + \frac{1}{2})\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.*

Alle Nullstellen dieser komplexen Funktionen sind also reell.

Beweis Wir überlegen uns die Aussage für die Sinusfunktion. Da die Sinusfunktion in $(0, \pi)$ keine Nullstellen hat und $\sin(x + \pi) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt sofort, dass die Zahlen die Gestalt $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, die einzigen reellen Nullstellen der Sinusfunktion sind.

Wir überlegen uns noch, dass es keine nichtreellen Nullstellen gibt. Angenommen, es ist $\sin(x+iy) = 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist nach dem Additionstheorem

$$\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0,$$

und hieraus folgt

$$\sin x \cosh y = 0, \quad \cos x \sinh y = 0. \tag{6.4}$$

Wegen $\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) > 0$ folgt aus der ersten Gleichung von (6.4), dass $\sin x = 0$ und folglich $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für diese x ist aber $|\cos x| = 1$, und aus der zweiten Gleichung von (6.4) folgt $\sinh y = 0$. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = e^{-y} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} = 1.$$

Diese Gleichung ist für $y = 0$ erfüllt. Weitere Lösungen kann es nach Folgerung 6.24 nicht geben. Alle Nullstellen der Sinusfunktion liegen also auf der reellen Achse. ■

6.6 Monotonie und Umkehrfunktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* (*fallend*), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \leq x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$). Die Funktion f heißt *streng monoton wachsend* (*fallend*) auf D, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$). Nach Folgerung 6.24 ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Jede streng monotone Funktion ist injektiv (aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$) und, betrachtet als Funktion f von D auf $f(D) = W(f)$, auch surjektiv. Man kann also ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D$ bilden.

Satz 6.30 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei streng monoton wachsend (oder fallend). Dann ist die Funktion $f^{-1} : W(f) \to I$ ebenfalls streng monoton wachsend (oder fallend), und diese Funktion ist stetig.*

Beachten Sie, dass wir die Stetigkeit von f nicht verlangt haben.

Beweis Sei beispielsweise f streng monoton wachsend. Wenn $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ sowie $y_1 < y_2$ ist, so muss auch $x_1 < x_2$ sein (andernfalls würde ja aus $x_1 \geq x_2$ auch $f(x_1) \geq f(x_2)$ folgen, da f monoton wachsend ist). Also ist auch f^{-1} streng monoton wachsend.

Wir zeigen noch die Stetigkeit von f^{-1} in jedem Punkt $y_0 \in W(f)$, d.h. wir zeigen

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in W(f) \quad \text{mit} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{gilt:} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

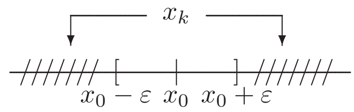
Diesen Beweis führen wir indirekt. Wir nehmen also an, dass

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in W(f) \quad \text{mit} \quad |y - y_0| < \delta : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon.$$

Da dies für alle $\delta > 0$ gelten soll, können wir für δ der Reihe nach die Zahlen $1/1, 1/2, \dots, 1/k, \dots$ wählen und erhalten

Es gibt Zahlen $y_k \in W(f)$ mit $y_k \to y_0$ so, dass $|f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon$.

Sei $x_k := f^{-1}(y_k)$ und $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Da $|x_k - x_0| \geq \varepsilon$, ist stets wenigstens eine der folgenden Möglichkeiten realisiert:



- Es ist $x_k \leq x_0 - \varepsilon$ für alle k aus einer unendlichen Teilmenge $\mathbb{N}_L$ von $\mathbb{N}$, oder
- es ist $x_k \geq x_0 + \varepsilon$ für alle k aus einer unendlichen Teilmenge $\mathbb{N}_R$ von $\mathbb{N}$.

Im ersten Fall gilt wegen der strengen Montonie von f

$$y_k = f(x_k) \leq f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_L,$$

woraus nach Grenzübergang $k \to \infty$ folgt

$$y_0 \leq f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0, \quad \text{ein Widerspruch.}$$

Genauso erhält man im zweiten Fall einen Widerspruch. Also ist f^{-1} stetig. ∎

6.6.1 Die reelle Logarithmusfunktion

Nach Folgerung 6.24 ist die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Der Wertebereich dieser Funktion ist das Intervall $(0, \infty)$. Wegen $\exp n = e^n > 2^n$ nimmt sie nämlich beliebig große und wegen $\exp(-n) = (\exp n)^{-1}$ auch beliebig kleine positive Werte an. Nach dem Zwischenwertsatz muss sie dann alle positiven Werte annehmen. Außerdem ist $\exp x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass exp (wieder nach dem Zwischenwertsatz) keine negativen Werte annimmt. Die Umkehrfunktion der Funktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt der *natürliche Logarithmus*. Sie wird mit ln oder log bezeichnet. Der natürliche Logarithmus ln ist also eine Abbildung von $(0, \infty)$ auf $\mathbb{R}$, und aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion erhält man leicht:

- ln ist streng monoton wachsend und stetig auf $(0, \infty)$ (Satz 6.2).
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$.
- Für alle $x, y \in (0, \infty)$ ist $xy = e^{\ln(xy)}$ sowie $xy = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$, also
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$
- Insbesondere ist $\ln(1/x) = -\ln x$ und $\ln(x^n) = n \ln x$.

Die Logarithmusfunktion ermöglicht die Definition von Potenzen zu einer beliebigen Basis $a > 0$ durch

$$a^b := e^{b \ln a} \quad \text{für } b \in \mathbb{R}.$$

Für $a \in (0,1)$ ist $\ln a < 0$, und für $a > 1$ ist $\ln a > 0$. Die Exponentialfunktion zur Basis a,

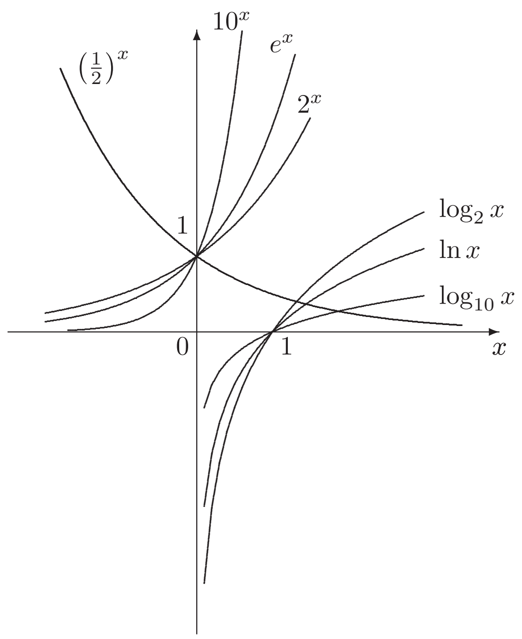
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x,$$

ist daher für $a \in (0,1)$ streng monoton fallend und für $a > 1$ streng monoton wachsend. Für $a = 1$ ist die Funktion $x \mapsto a^x$ konstant gleich 1. Man bestätigt auch leicht die aus der Schule bekannten "Potenzgesetze"

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a} \cdot e^{y \ln a} = a^x a^y,$$

$$(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{y \ln(e^{x \ln a})} = e^{yx \ln a} = a^{(xy)}.$$

Wegen $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$ ist der Graph der Funktion $x \mapsto a^x$ das Spiegelbild des Graphen der Funktion $x \mapsto (1/a)^x$ an der y–Achse.
Für $a > 1$ nennen wir die Umkehrfunktion zu $\mathbb{R} \to (0,\infty), x \mapsto a^x$ den *Logarithmus zur Basis a* und bezeichnen diese Funktion mit $\log_a$. Insbesondere ist $\log_e = \ln$.



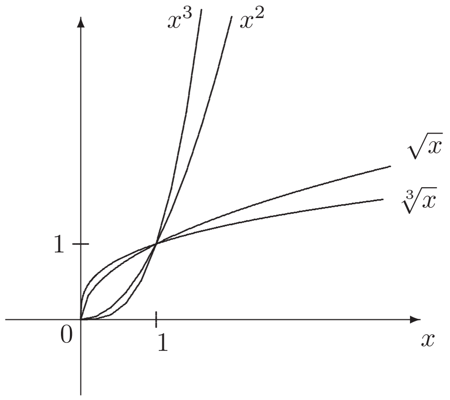
Ganz ähnlich erhält man, dass die für $a \in \mathbb{R}$ definierte *Potenzfunktion*

$$(0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a := e^{a \ln x}$$

auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend ist für $a > 0$, streng monoton fallend für $a < 0$ und konstant gleich 1 für $a = 0$. Für $a \neq 0$ ist ihre Umkehrfunktion gegeben durch

$$(0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{1/a}.$$

Nach Satz 6.30 sind diese Funktionen stetig.



6.6.2 Zyklometrische oder Arkusfunktionen

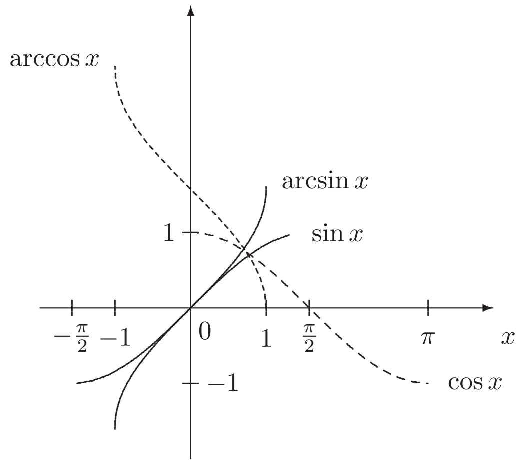
Die zyklometrischen Funktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Da die trigonometrischen Funktionen nicht auf ganz $\mathbb{R}$ injektiv sind (Periodizität!), kann man sie nur auf Teilintervallen von $\mathbb{R}$ umkehren, und je nach Wahl dieses Intervalls ergeben sich verschiedene Umkehrfunktionen. Häufig gewählt werden folgende Intervalle:

(a) $f(x) = \sin x$ auf $[-\pi/2, \pi/2]$.
$f^{-1}(x) = \arcsin x$ auf $[-1, 1]$.

(b) $f(x) = \cos x$ auf $[0, \pi]$,
$f^{-1}(x) = \arccos x$ auf $[-1, 1]$.

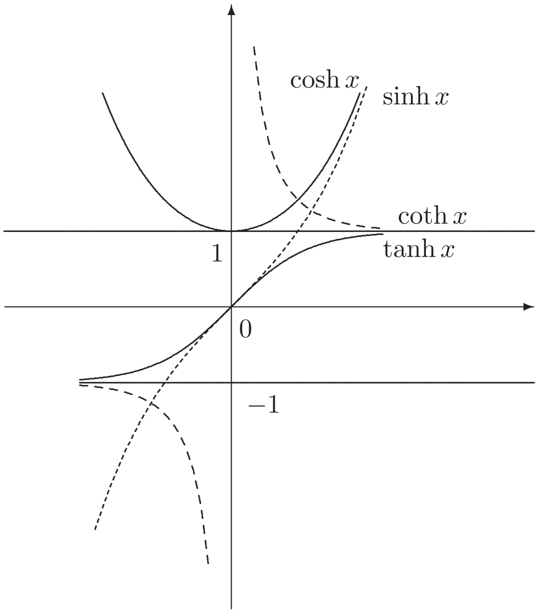
(c) $f(x) = \tan x$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$.
$f^{-1}(x) = \arctan x$ auf $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \cot x$ auf $(0, \pi)$.
$f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$ auf $\mathbb{R}$.



6.6.3 Areafunktionen

Die Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen. Da sinh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, existiert die Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x$ auf $\mathbb{R}$. (Lies: Areasinushyperbolicus). Dagegen ist die Funktion $x \mapsto \cosh x$ auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend. Aus $\cosh[0, \infty) = [1, \infty)$ folgt: Die Umkehrfunktion zu $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$, $x \mapsto \cosh x$ ist definiert. Man bezeichnet sie mit arcosh .



Weiter definiert man auch

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

(letzteres nur für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) und hat Umkehrfunktionen $\operatorname{artanh} x$ auf $(-1, 1)$ und $\operatorname{arcoth} x$ auf $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

6.7 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

6.7.1 Kompakte Mengen

Wir haben bereits mehrfach den Satz von Bolzano/Weierstraß benutzt. Dieser gilt in $\mathbb{R}$ und auch in $\mathbb{R}^n$, jedoch nicht in beliebigen metrischen Räumen. Räume, in denen dieser Satz gilt, spielen eine wichtige Rolle in der Analysis.

Definition 6.31 *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq M$ heißt* kompakt*, wenn jede unendliche Teilmenge von A einen Häufungspunkt besitzt, der zu A gehört. Insbesondere ist jede endliche Menge kompakt. Mengen, deren Abschließung kompakt ist, heißen* relativ kompakt .

Der folgende Satz wird genauso bewiesen wie die Äquivalenz der beiden Fassungen des Satzes von Bolzano/Weierstraß (Sätze 4.8 und 4.9).

Satz 6.32 *Sei (M, d) metrischer Raum. Eine Menge $A \in M$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert zu A gehört.*

Wir beschreiben nun einige Eigenschaften kompakter Mengen.

Satz 6.33 *Kompakte Mengen sind abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ kompakt.

Abgeschlossenheit von A: Sei $x^* \in M$ Häufungspunkt von A. Dann gibt es eine Folge (x_n) in A, die gegen x^* konvergiert. Nach Satz 6.32 besitzt diese Folge eine Teilfolge (x_{k_n}), die gegen ein Element x^{**} *aus* A konvergiert. Die Grenzwerte von (x_n) und (x_{k_n}) fallen aber zusammen (Satz 3.21). Also gehört $x^* = x^{**}$ zu A.

Beschränktheit von A: Der Beweis erfolgt indirekt: Wir nehmen an, dass A unbeschränkt ist und konstruieren eine Folge, die keine in A konvergente Teilfolge besitzt.

Sei $x_0 \in A$ beliebig. Wir wählen $x_1 \in A$ so, dass $d(x_1, x_0) \geq 1$. Die weiteren Folgenglieder definieren wir rekursiv. Wenn $x_0, x_1, \ldots, x_k$ bereits konstruiert sind, so sei R_k der Radius einer Kugel um x_0, die $x_1, \ldots, x_k$ enthält. Wir wählen dann x_{k+1} so, dass $d(x_{k+1}, x_0) \geq R_k + 1$. Für alle $l \leq k$ ist dann

$$d(x_{k+1}, x_l) \geq d(x_{k+1}, x_0) - d(x_0, x_l) \geq R_k + 1 - R_k = 1.$$

Je zwei beliebige Glieder der Folge (x_n) haben also einen Abstand von mindestens 1 voneinander. Diese Folge enthält daher keine konvergente Teilfolge. ∎

Satz 6.34 *Eine Teilmenge des Euklidschen Raumes $\mathbb{R}^k$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis Ist $A \in \mathbb{R}^k$ kompakt, so ist A abgeschlossen und beschränkt nach Satz 6.33. Umgekehrt ist nach dem Satz von Bolzano/Weierstraß im $\mathbb{R}^k$ (Folgerung 4.17) jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ kompakt. ∎

Folgerung 6.35 *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie beschränkt ist.*

Für eine weitere Charakterisierung kompakter Mengen definieren wir zunächst:

Definition 6.36 *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Weiter sei $\mathcal{G} = (G_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein System offener Mengen in M. Das System $\mathcal{G}$ heißt eine* offene Überdeckung *von A, wenn $A \subseteq \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Man sagt weiter, dass $\mathcal{G}$ eine* endliche Überdeckung von *A enthält, wenn es endlich viele Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ so gibt, dass $A \subseteq G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$.*

Satz 6.37 (Überdeckungssatz von Heine/Borel) *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann kompakt, wenn sich aus jeder offenen Überdeckung von A eine endliche Überdeckung auswählen lässt.*

Beachten Sie, dass man die kompakten Mengen bereits mit Hilfe der offenen Mengen vollständig charakterisieren kann.

Beweis Den kompletten Beweis finden Sie in Lehrbüchern zur Funktionalanalysis. Wir werden den schwierigeren Teil nur für $M = \mathbb{R}$ zeigen. Dieser Teil lässt sich auch noch ohne Mühe auf den Fall $M = \mathbb{R}^k$ übertragen (Intervalle werden zu Quadern).

($\Longleftarrow$) Wir zeigen: Wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Überdeckung enthält, so ist A kompakt. Diesen Beweis führen wir indirekt. Angenommen, A besitzt eine unendliche Teilmenge S, die keinen Häufungspunkt in A hat. Dann besitzt jeder Punkt x von A eine offene Umgebung $U_r(x)$ (wobei r von x abhängen kann), die außer möglicherweise x selbst keinen weiteren Punkt aus S enthält.

Das System $\{U_r(x)\}_{x\in A}$ bildet eine offene Überdeckung von A. Jede Menge aus diesem System überdeckt höchstens eine Punkt von S. Da S unendlich viele Punkte enthält, kann man aus $\{U_r(x)\}_{x\in A}$ keine endliche Überdeckung von A auswählen. Widerspruch zur Voraussetzung.

($\Longrightarrow$) Sei nun speziell $M = \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Weiter sei $\mathcal{G} := (G_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Wir müssen zeigen, dass man aus $\mathcal{G}$ eine endliche Überdeckung von A auswählen kann. Dies zeigen wir wieder indirekt, d.h. wir nehmen an, es lasse sich aus $\mathcal{G}$ keine endliche Überdeckung von A auswählen.

Es sei J_0 ein abgeschlossenes Intervall, welches A enthält. (Dieses existiert wegen der Beschränktheit von A.) Wir zerlegen J_0 in zwei gleichlange abgeschlossene Teilintervalle. Wenigstens eines dieser Teilintervalle hat die Eigenschaft, dass sich der Durchschnitt von A mit diesem Teilintervall nicht durch endlich viele der G_α überdecken lässt. Dieses Teilintervall nennen wir J_1. Nun halbieren wir J_1 und wählen wie oben ein abgeschlossenes Teilintervall J_2 von J_1, so dass zur Überdeckung von $A \cap J_2$ unendlich viele der G_α nötig sind. Wir fahren so fort und erhalten eine Folge $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$ ineinander geschachtelter abgeschlossener Intervalle, deren Intervalllängen eine Nullfolge bilden und bei denen für die Überdeckung von $A \cap J_k$ jeweils unendlich viele der G_α erforderlich sind.

Nach dem Intervallschachtelungssatz gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in J_k$ für alle k. Da A abgeschlossen ist, ist $x \in A$. Insbesondere gibt es ein $G_\alpha \in \mathcal{G}$ mit $x \in G_\alpha$. Da G_α offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq G_\alpha$. Dann liegen aber für hinreichend großes n auch alle Intervalle J_n in G_α. Jedes dieser Intervalle (und damit jede der Mengen $J_n \cap A$) wird also bereits durch *eine* Menge G_α überdeckt. Widerspruch. ∎

6.7.2 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Satz 6.38 *Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$ kompakt und $f : A \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $f(A)$ kompakt.*

Kurzfassung: Stetige Funktionen überführen kompakte Mengen in kompakte Mengen.

Beweis Sei (y_n) eine Folge in $f(A) \subseteq Y$. Wir wählen zu jedem y_n ein $x_n \in A$ mit $f(x_n) = y_n$. Da A kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) eine in A konvergente Teilfolge (x_{k_n}) mit Grenzwert $x^* \in A$. Aus $x_{k_n} \to x^*$ und der Stetigkeit von f folgt $f(x_{k_n}) = y_{k_n} \to f(x^*) \in f(A)$. Also besitzt (y_n) eine in $f(A)$ konvergente Teilfolge. ∎

Im Falle $Y = \mathbb{R}$ lässt sich dieser Satz noch ergänzen. Da $f(A)$ beschränkt ist, besitzt $f(A)$ ein (endliches) Infimum und Supremum, und da $f(A)$ abgeschlossen ist, ist das Infimum ein Minimum und das Supremum ein Maximum.

Satz 6.39 (Weierstraß) *Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ kompakt und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Punkte $x_{\min}, x_{\max}$ in A so, dass*

$$f(x_{\min}) = \inf_{x \in A} f(x), \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Kurzfassung: Stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen ihr Infimum und ihr Supremum an.

Die Kompaktheit des Definitionsgebietes einer bijektiven stetigen Funktion garantiert auch die Stetigkeit der Umkehrfunktion. Genauer:

Satz 6.40 *Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$ kompakt, $f : A \to Y$ stetig und injektiv. Dann ist $f^{-1} : f(A) \to A$ stetig.*

Beweis Sei (y_n) eine Folge in $f(A)$ mit Grenzwert $y^* \in f(A)$. Seien $x_n, x^* \in A$ so, dass $f(x_n) = y_n$ und $f(x^*) = y^*$. Wir zeigen, dass $x_n \to x^*$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Umgebung $U_\varepsilon(x^*)$ mit $\varepsilon > 0$, außerhalb derer unendlich viele der x_n liegen. Wegen der Kompaktheit von A läßt sich aus diesen x_n eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) auswählen, deren Grenzwert $\overline{x}$ von x^* verschieden ist (aus $d(x^*, x_{n_k}) > \varepsilon$ folgt ja $d(x^*, \overline{x}) \geq \varepsilon$). Aus der Stetigkeit von f folgt nun $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(\overline{x})$. Da aber bereits $y_n \to y^*$ gilt, muss $f(\overline{x}) = y^*$ und somit $\overline{x} = x^*$ sein, ein Widerspruch. ∎

Mit diesem Resultat kann man auch eine gewisse Umkehrung zu Satz 6.30 zeigen.

Satz 6.41 *Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und injektive Funktion. Dann ist f streng monoton.*

Einen Beweis finden Sie in Barner/Flohr, Analysis I, S. 236.

Abschließend diskutieren wir eine weitere Eigenschaft stetiger Funktionen auf kompakten Mengen, die in vielen Beweisen ausgenutzt wird. Dazu vereinbaren wir:

Definition 6.42 *Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$. Die Funktion f heißt* gleichmäßig stetig auf A, *wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass für alle $x, y \in A$ mit $d_X(x, y) < \delta$ gilt: $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Beachten Sie, dass δ nicht mehr von x bzw. y abhängt, sondern allein von ε (während bei der Definition von "f ist stetig auf A" δ sowohl von ε als auch von $x \in A$ abhängt). Hält man in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit den Punkt $y = x_0$ fest, so ergibt sich gerade die Stetigkeit von f an der Stelle x_0. Aus der *gleichmäßigen* Stetigkeit von f auf A folgt also die "gewöhnliche" Stetigkeit von f in jedem Punkt von A. Die Umkehrung gilt i.a. nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel Für $x \in (0, 1]$ sei $f(x) := 1/x$. Die Funktion f ist auf $(0, 1]$ stetig. Wäre sie auch gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$, so gäbe es für $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so, dass aus $|x - y| < \delta$ folgt $|1/x - 1/y| < 1$.
Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n} < \delta$. Für $x := \frac{1}{n}$ und $y := \frac{1}{2n}$ ist dann $|x - y| < \delta$, aber $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = n$, ein Widerspruch. ∎

Satz 6.43 *Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$ kompakt und $f : A \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf A.*

Kurzfassung: Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig.

Beweis Wir stützen den Beweis auf die in Satz 6.32 bewiesene Charakterisierung kompakter Mengen und führen ihn indirekt. (Empfehlung: Suchen Sie einen alternativen Beweis unter Benutzung des Heine/Borelschen Überdeckungssatzes.)
Angenommen, f ist auf A stetig, jedoch nicht gleichmäßig stetig. Im Gegensatz zur Definition der gleichmäßigen Stetigkeit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A \quad \text{mit} \quad d_X(x, y) < \delta : \quad d_Y\Big(f(x), f(y)\Big) < \varepsilon$$

soll also gelten

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in A \quad \text{mit} \quad d_X(x_\delta, y_\delta) < \delta : \quad d_Y\Big(f(x_\delta), f(y_\delta)\Big) \geq \varepsilon.$$

Dies gilt für alle $\delta > 0$. Wir wählen für δ die Zahlen $1/k$ mit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und schreiben x_k, y_k statt x_δ, y_δ. Wir erhalten so zwei Folgen $(x_k), (y_k)$ in A. Da A kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) von (x_k) mit Grenzwert

$x^* \in A$. Da nach Wahl von x_k, y_k für alle k die Ungleichung $d_X(x_k, y_k) < 1/k$ gilt, konvergiert auch die Teilfolge (y_{n_k}) von (y_k) gegen x^*. Schließlich gilt mit der Dreiecksungleichung für jedes n_k

$$0 < \varepsilon \le d_Y\Big(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})\Big) \le d_Y\Big(f(x_{n_k}), f(x^*)\Big) + d_Y\Big(f(x^*), f(y_{n_k})\Big).$$

Nun ist f stetig. Für $k \to \infty$ konvergiert daher die rechte Seite dieser Abschätzung gegen 0, woraus der Widerspruch $0 < \varepsilon \le 0$ folgt. ■

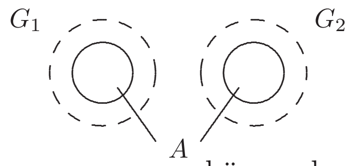
6.8 Stetige Funktionen auf zusammenhängenden Mengen

Wir wollen nun versuchen, die anschauliche Vorstellung, dass eine Menge aus "einem Stück" sein oder aus "mehreren Teilen" bestehen kann, zu präzisieren.

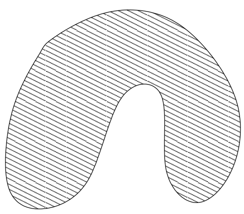
Definition 6.44 *Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt* zusammenhängend*, wenn es keine zwei offene Mengen G_1, G_2 in X mit folgenden Eigenschaften gibt:*

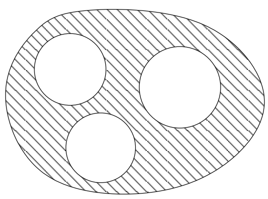
$$G_1 \cap G_2 = \emptyset \quad A \subseteq G_1 \cup G_2, \quad A \cap G_1 \neq \emptyset \quad \textit{und} \quad A \cap G_2 \neq \emptyset.$$

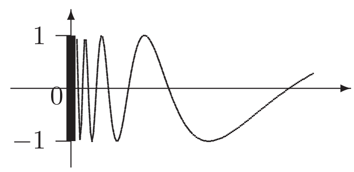
Diese Definition ist etwas verzwickt. Am einfachsten ist wohl zu verstehen, wann eine Menge nicht zusammenhängend ist:



Dagegen sind folgende Mengen zusammenhängend:







Die Menge in letzten Bild ist der Graph der Funktion $x \mapsto \sin(1/x)$ für $x > 0$, vereinigt mit dem Intervall $[-1, 1]$ auf der y–Achse. Wir beschreiben nun die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Satz 6.45 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$:*

(a) *A ist zusammenhängend.*

(b) *Aus $x, y \in A$ und $x < z < y$ folgt $z \in A$.*

Beweis $(a) \Longrightarrow (b)$ Diese Implikation zeigen wir indirekt. Angenommen, es gibt Punkte $x, y \in A$ und $z \in \mathbb{R} \backslash A$ mit $x < z < y$. Dann sind die Mengen

$$G_1 := (-\infty, z) \quad \text{und} \quad G_2 := (z, +\infty)$$

offen und nicht leer. Weiter ist $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $A \subseteq G_1 \cup G_2$, und die Durchschnitte $A \cap G_1$ und $A \cap G_2$ sind nicht leer, da ja $x \in G_1 \cap A$ und $y \in G_2 \cap A$. Also ist A nicht zusammenhängend.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Auch diesen Teil zeigen wir indirekt. Ist A nicht zusammenhängend, so gibt es offene Mengen $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad A \subseteq G_1 \cup G_2, \quad A \cap G_1 \neq \emptyset, \quad A \cap G_2 \neq \emptyset.$$

Wir wählen Punkte $x \in A \cap G_1$ und $y \in A \cap G_2$. Wegen $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ist $x \neq y$, und um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, nehmen wir $x < y$ an (andernfalls tauschen wir die Rollen von G_1 und G_2). Unser Ziel ist es, einen Punkt $z \in \mathbb{R}$ mit $x < z < y$ zu finden, der nicht zu A gehört.

Dazu betrachten wir die Menge $C := G_1 \cap [x, y]$. Diese Menge ist beschränkt und nicht leer und besitzt folglich ein endliches Supremum $z := \sup C$. Wegen $C \subseteq [x, y]$ ist $x \leq z \leq y$. Wir zeigen, dass $z < y$. Da y innerer Punkt von G_2 ist, gibt es eine offene Umgebung U von y, die ganz in G_2 liegt. Wegen $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ enthält U keine Punkte aus G_1, und da U offen ist, kann U auch keine Häufungspunkte von G_1 enthalten. Insbesondere ist $z \notin U$ und damit $z < y$. Ganz ähnlich macht man sich klar, dass $x < z$.

Wir zeigen, dass $z \notin G_1 \cup G_2$. Zunächst ist $z \notin G_1$. Da nämlich (wie wir bereits wissen) $z \in (x, y)$ ist und G_1 offen ist, würde aus $z \in G_1$ folgen, dass mit z auch eine ganze Umgebung von z in $G_1 \cap (x, y)$ liegt. Dann kann aber z nicht das Supremum von C sein.

Der Punkt z kann aber auch nicht in G_2 liegen, da er dann ja einerseits ein innerer Punkt von G_2 wäre, andererseits in jeder Umgebung von z Punkte aus G_1 lägen, im Widerspruch zu $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Also ist $z \notin G_1 \cup G_2$ und damit erst recht $z \notin A$. ■

Folgerung 6.46 *Eine Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *ist genau dann zusammenhängend, wenn sie gleich einem der Intervalle*

$$[a, b], \quad [a, d), \quad (c, b] \quad \textit{oder} \quad (c, d)$$

ist, wobei $c = -\infty$ *und* $d = +\infty$ *zugelassen sind.*

Beweis Mit Satz 6.45 macht sich sofort klar, dass jedes der angegebenen Intervalle zusammenhängend ist. Sei umgekehrt A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nicht von der Gestalt eines dieser Intervalle ist, und sei $m := \inf A$ und

$M := \sup A$ ($m = -\infty$ und $M = +\infty$ sind zugelassen). Dann existiert ein Punkt $z \in \mathbb{R}\backslash A$ mit $m < z < M$ (da sonst ja eine der Intervalldefinitionen erfüllt wäre). Dann findet man (vgl. Satz 1.13) aber auch Punkte $x, y \in A$ mit $m \leq x < z < y \leq M$. Nach Satz 6.45 kann A nicht zusammenhängend sein. ■

Dieses einfache Bild, welches man von den zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ hat, ändert sich drastisch, wenn man zu $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{C}$ übergeht. Z.B. kann man relativ leicht überprüfen, dass die Juliamengen (die wir in Abschnitt 4.5 kurz angesprochen haben) für alle Parameter $c \in [-2, 1/4]$ zusammenhängend sind, während sie für alle Parameter von Betrag größer 2 nicht zusammenhängend sind. Sie sind dann sogar in einem besonders hohen Maß nicht zusammenhängend: ihre Bilder ähneln "fein verteiltem Staub". Man nennt solche Mengen auch *total unzusammenhängend*.

Für die übrigen Parameterwerte ist es meist nicht so einfach zu entscheiden, ob die zugehörige Juliamenge zusammenhängend ist oder nicht. Wirklich erstaunlich ist aber der folgende Satz:

> Die zum Parameter c gehörende Juliamenge ist genau dann zusammenhängend, wenn c zur Mandelbrotmenge gehört.

Außerdem weiss man noch (Donady/Hubbard 1982):

> Die Mandelbrotmenge ist zusammenhängend.

Für Details muss ich Sie auf Spezialliteratur verweisen. ■

Abschließend schauen wir uns stetige Funktionen auf zusammenhängenden Mengen an.

Satz 6.47 *Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$ zusammenhängend, und $f : A \to Y$ sei stetig. Dann ist $f(A)$ zusammenhängend.*

Kurzfassung: Stetige Funktionen überführen zusammenhängende Mengen in zusammenhängende Mengen.

Beweis Angenommen, $f(A)$ ist nicht zusammenhängend. Dann existieren nichtleere offene Teilmengen G_1, G_2 von Y so, dass

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad f(A) \subseteq G_1 \cup G_2, \quad f(A) \cap G_1 \neq \emptyset, \quad f(A) \cap G_2 \neq \emptyset. \tag{6.5}$$

Seien $D_1 := f^{-1}(G_1)$ und $D_2 := f^{-1}(G_2)$. Da f stetig ist, sind D_1 und D_2 offen in X (Satz 6.5), und aus (6.5) folgt sofort

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad A \subseteq D_1 \cup D_2, \quad A \cap D_1 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad A \cap D_2 \neq \emptyset.$$

Also ist A im Widerspruch zur Voraussetzung nicht zusammenhängend. ■

Speziell können wir diesen Satz anwenden auf stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

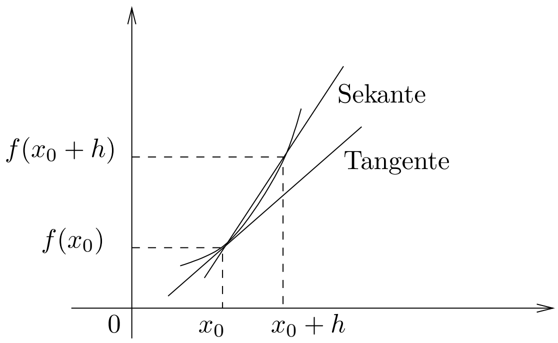
Da das Intervall $[a, b]$ zusammenhängend ist, ist auch $f([a, b])$ nach Satz 6.47 zusammenhängend. Dann ist $f([a, b])$ nach Folgerung 6.46 ein Intervall. Da $f(a)$ und $f(b)$ diesem Intervall angehören, muss auch jeder zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegende Wert ein Funktionswert von f sein. Dies ist aber genau die Aussage des Zwischenwertsatzes (Satz 6.26). Umgekehrt können wir Satz 6.47 als Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes auf beliebige metrische Räume deuten.

7 Differentialrechnung für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

Die Beschäftigung mit den folgenden beiden Problemen hat wesentlich zur Herausbildung der Differentialrechnung beigetragen.

Tangentenproblem (Leibniz) Gegeben ist eine reellwertige Funktion f, die auf einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist. Gesucht ist der Anstieg der Tangenten an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Der Anstieg der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ mit $h \neq 0$ ist leicht zu bestimmen:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$



Anschaulich erwartet man, dass sich der Anstieg der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ergibt, wenn man den Grenzwert der Sekantenanstiege für $h \to 0$ betrachtet:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Geschwindigkeitsproblem (Newton) Sei $s(t)$ die bis zur Zeit t zurückgelegte Weglänge eines Massepunktes bei geradliniger Bewegung. Bei gleichförmiger Bewegung ist der Quotient

$$v := \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

von den Zeitpunkten t_0, t unabhängig und gibt die Geschwindigkeit des Massepunktes an. Bei einer beschleunigten Bewegung kann dieser Quotient nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit sein. Die Momentangeschwindigkeit zum Zweitpunkt t_0 sollte sich als Grenzwert ergeben:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} .$$

7.1 Definition der Ableitung und einfache Eigenschaften

Definition 7.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$, und $x_0 \in D$ sei ein Häufungspunkt von D. Dann heißt die Funktion*

$$D \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

der Differenzenquotient *von f in x_0. Die Funktion f heißt* in x_0 differenzierbar*, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 *und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt* differenzierbar auf D*, wenn jeder Punkt von D ein Häufungspunkt von D ist und wenn f in jedem Punkt von D differenzierbar ist. Schließlich heißt f* stetig differenzierbar auf D*, wenn f auf D differenzierbar ist und wenn die Funktion*

$$f' : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

auf D stetig ist.

Eine äquivalente Beschreibung der Differenzierbarkeit liefert folgender Satz.

Satz 7.2 (Zerlegungssatz) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Die Funktion f ist genau dann differenzierbar in x_0, wenn es eine reelle Zahl α und eine Funktion $r : D \to \mathbb{R}$, die in x_0 stetig und gleich 0 ist, so gibt, dass*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad \textit{für alle } x \in D. \tag{7.1}$$

In diesem Fall ist $\alpha = f'(x_0)$.

Beweis ($\Longrightarrow$) Sei f differenzierbar in x_0. Dann definieren wir $\alpha := f'(x_0)$ sowie

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{falls} \quad x \in D \backslash \{x_0\} \\ 0 & \text{falls} \quad x = x_0. \end{cases}$$

Offenbar ist die Funktion r auf ganz D definiert und gleich 0 in x_0. Wegen

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 = r(x_0)$$

ist sie auch stetig in x_0. Mit dieser Wahl von α und r folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + r(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

zunächst für alle $x \in D\backslash\{x_0\}$. Letzteres ist aber auch für $x = x_0$ richtig.

($\Longleftarrow$) Aus (7.1) folgt für alle $x \in D\backslash\{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + r(x). \tag{7.2}$$

Die rechte Seite von (7.2) hat für $x \to x_0$ den Grenzwert $\alpha + r(x_0) = \alpha$. Also hat auch die linke Seite von (7.2) diesen Grenzwert:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$

Das heißt aber, dass f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = \alpha$ ist. ■

Folgerung 7.3 *Ist f differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.*

Dazu lässt man in (7.1) x gegen x_0 streben und erhält $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

Die Umkehrung von Folgerung 7.3 ist falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel Die Funktion $f : x \mapsto |x|$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig, in $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ aber nicht differenzierbar. Für $x_0 = 0$ und $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist nämlich

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x > 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0. \end{cases}$$

Der Grenzwert von $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \to x_0$ existiert also nicht. ■

Dieses Beispiel legt nahe, in Analogie zu links– und rechtsseitigen Grenzwerten von Funktionen auch einseitige Ableitungen zu betrachten. So nennt man die Grenzwerte (sofern sie existieren)

$$f'(x_0 - 0) := \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad f'(x_0 + 0) := \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die *links– bzw. rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle x_0*. Für die Funktion $f : x \mapsto |x|$ ist also

$$f'(0 - 0) = -1, \quad f'(0 + 0) = +1.$$

7.2 Rechnen mit Ableitungen

Satz 7.4 *Seien f und g an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f \pm g, cf, fg$ sowie (falls $g(x_0) \neq 0$) f/g an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0), \qquad\qquad (cf)'(x_0) = cf'(x_0), \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \\ (f/g)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

Beweis Wir überlegen uns beispielsweise die Produktregel:

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$ ■

Für die Differenzierbarkeit verketteter Funktionen hat man folgendes Resultat.

Satz 7.5 (Kettenregel) *Die Funktionen f und g seien so beschaffen, dass die Verkettung $g \circ f$ gebildet werden kann. Weiter sei f an der Stelle x_0 und g an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\Big(f(x_0)\Big) \cdot f'(x_0). \tag{7.3}$$

Beweis Wir führen den Beweis mit Hilfe von Satz 7.2. Differenzierbarkeit von f in x_0 bzw. von g in $f(x_0)$ bedeutet demnach

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \tag{7.4}$$

$$g(y) - g\Big(f(x_0)\Big) = g'\Big(f(x_0)\Big)\Big(y - f(x_0)\Big) + s(y)\Big(y - f(x_0)\Big), \tag{7.5}$$

wobei die Funktion r in x_0 stetig und gleich 0 ist und s in $f(x_0)$ stetig und gleich 0 ist. Wir ersetzen in (7.5) y durch $f(x)$ und setzen dann (7.4) in (7.5) ein:

$$\begin{aligned}
g\Big(f(x)\Big) - g\Big(f(x_0)\Big) &= g'\Big(f(x_0)\Big)\Big(f(x) - f(x_0)\Big) + s\Big(f(x)\Big)\Big(f(x) - f(x_0)\Big) \\
&= g'\Big(f(x_0)\Big)f'(x_0)(x - x_0) + g'\Big(f(x_0)\Big)r(x)(x - x_0) \\
&\quad + s\Big(f(x)\Big)\Big(f'(x_0) + r(x)\Big)(x - x_0) \\
&= g'\Big(f(x_0)\Big)f'(x_0)(x - x_0) + t(x)(x - x_0)
\end{aligned}$$

mit $t(x) = g'(f(x_0))r(x) + s(f(x))f'(x_0) + s(f(x))r(x)$. Die Funktion t ist an der Stelle x_0 stetig und gleich 0 (Satz 6.6). Aus Satz 7.2 folgt die Behauptung. ■

Es sei nun f eine bijektive Funktion. Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist *und* wenn die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist, dann folgt aus der Kettenregel (7.3)

$$1 = (g \circ f)'(x_0) = g'\Big(f(x_0)\Big) \cdot f'(x_0) \quad \text{bzw.} \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wir zeigen nun, dass diese Resultate bereits unter weit schwächeren Voraussetzungen an g (Stetigkeit in y_0) gelten, wenn man die Invertierbarkeit von $f'(x_0)$ fordert.

Satz 7.6 *Die bijektive Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar, und es sei $f'(x_0) \neq 0$. Weiter sei die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist g differenzierbar an der Stelle y_0, und es gilt*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{7.6}$$

Beweis Sei $y \neq y_0$ aus dem Definitionsbereich von g und $g(y) =: x$. Dann ist

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}. \tag{7.7}$$

Strebt y gegen y_0, so streben wegen der Stetigkeit von g an der Stelle y_0 die entsprechenden Funktionswerte $g(y) = x$ gegen $g(y_0) = x_0$, und damit strebt

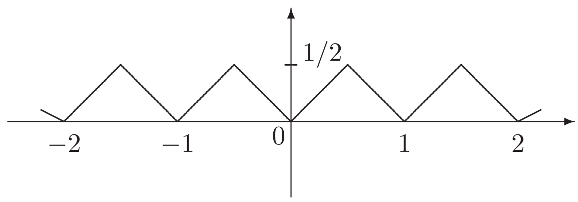
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{gegen} \quad f'(x_0).$$

Aus $f'(x_0) \neq 0$ folgt weiter

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Die rechte Seite von (7.7) konvergiert also für $y \to y_0$ gegen $1/f'(x_0)$. Dann muss auch die linke Seite von (7.7) für $y \to y_0$ konvergieren (d.h. g ist differenzierbar an der Stelle y_0), und der Grenzwert ist $1/f'(x_0)$ (d.h. die Beziehung (7.6) gilt). ■

Anmerkung Es gibt Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, jedoch in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar sind. Um eine solche Funktion zu konstruieren, sei zunächst g die 1–periodische Funktion mit $g(x) = |x|$ für $|x| \leq 1/2$.



Die Funktion g ist genau an den Stellen $k/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar. Wir "verdichten" diese "singulären Stellen", indem wir für $j \in \mathbb{N}$ definieren

$$g_j(x) := \frac{1}{2^j}\, g(2^j x).$$

Jede Funktion g_j ist stetig und genau an den Stellen $k/2^{j+1}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar. Wir erklären eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x).$$

Man kann nun zeigen

- diese Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$. (Majorantenkriterium. Beachten Sie, dass $|g_j(x)| \leq 2^{-j}$.)
- f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig (direkt beweisen oder auf Abschnitt 9 warten).
- f ist in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Zum Beweis der dritten Aussage ist folgende Tatsache hilfreich:

Lemma 7.7 *Die Funktion f sei in a differenzierbar, und für die Folgen (x_n) und (y_n) gelte: $x_n \neq y_n$ und $x_n \leq a \leq y_n$ für alle n sowie* $\lim x_n = \lim y_n = a$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Versuchen Sie, dieses Lemma zu beweisen. Mit diesem Lemma erhält man leicht die Nichtdifferenzierbarkeit von f an der Stelle a, wenn man die Folgen (x_n) und y_n so wählt, dass

$$x_n = \frac{k_n}{2^n} \leq a \leq \frac{k_n + 1}{2^n} = y_n \quad \text{mit } k_n \in \mathbb{Z}.$$

Details finden Sie in Barner/Flor, Analysis I, S. 261 – 265. ■

7.3 Ableitungen spezieller Funktionen

7.3.1 Polynome und rationale Funktionen

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Im Fall $k \geq 1$ nutzen wir zum Nachweis der Differenzierbarkeit und zur Berechnung der Ableitung von $f : x \mapsto x^k$ die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültige Identität

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}).$$

Mit dieser folgt sofort

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \ldots + xx_0^{k-2} + x_0^{k-1}) = kx_0^{k-1}.$$

Die Funktion $f : x \mapsto x^k$ ist also für jedes $k \geq 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und

$$f'(x) = kx^{k-1}. \tag{7.8}$$

Im Fall $k = 0$ (d.h. $f(x) \equiv 1$) überprüft man die Differenzierbarkeit von f unmittelbar und findet $f'(x) \equiv 0$. Ist schließlich $k < 0$, so bekommt man mit der Quotientenregel die Differenzierbarkeit von $f : x \mapsto x^k$ für alle $x \neq 0$ und wieder die Gültigkeit von (7.8) für alle diese x.

Mit (7.8) können wir die Ableitungen beliebiger Polynome und auch die beliebiger rationaler Funktionen (das sind Funktionen der Gestalt P/Q, wobei P und $Q \not\equiv 0$ Polynome sind) bestimmen.

7.3.2 Exponential–, Logarithmus– und Potenzfunktion

Wir untersuchen zunächst die Differenzierbarkeit der durch $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, gegebenen Funktion. Wegen

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\frac{e^h - 1}{h}$$

haben wir den Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$ zu bestimmen. Nach Definition der Exponentialfunktion ist für $x \neq 0$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\Big(\big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\big) - 1\Big) = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots. \tag{7.9}$$

Die rechts stehende Potenzreihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ (sogar auf $\mathbb{C}$) absolut und stellt nach Satz 6.19 eine stetige Funktion dar. Der Grenzübergang $x \to 0$ in (7.9) liefert daher

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{7.10}$$

Also ist die Funktion $f : x \mapsto e^x$ überall differenzierbar, und

$$f'(x) = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{7.11}$$

Die Umkehrabbildung zu $f : x \mapsto e^x$ ist die auf $(0, \infty)$ erklärte Funktion $g : x \mapsto \ln x$. Nach Satz 6.30 ist g stetig. Außerdem ist $f'(x) = e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass g nach Satz 7.6 in jedem Punkt x_0 von $(0, \infty)$ differenzierbar ist und die Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}$$

besitzt. Wir haben also

$$g(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \in (0, \infty). \tag{7.12}$$

Mit (7.11), (7.12) und der Kettenregel können wir weitere Funktionen differenzieren.

Sei $f(x) = a^x$ *mit* $a > 0$. Wir schreiben $a^x = e^{x \ln a}$ und erhalten mit der Kettenregel (mit $g : x \mapsto x \ln a$ als innerer und $h : x \mapsto e^x$ als äußerer Funktion)

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x. \tag{7.13}$$

Sei $f(x) = \log_a x$ *mit* $a > 1$. Dann ist f die Umkehrfunktion zu $g : x \mapsto a^x$, und mit (7.13) und Satz 7.6 folgt mit $y = \log_a x$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\ln a \cdot a^y} = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} = \frac{1}{x \ln a}\,. \tag{7.14}$$

Sei $f(x) = x^a$ *mit* $x > 0$ *und* $a \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $x^a = e^{a \ln x}$ und erhalten mit der Kettenregel (und $g : x \mapsto a \ln x$ bzw. $h : x \mapsto e^x$ als innerer bzw. äußerer Funktion)

$$f'(x) = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}\,. \tag{7.15}$$

Die Differenzierbarkeit der Hyperbelfunktionen sowie die Beziehungen

$$\sinh' x = \cosh x, \quad \cosh' x = \sinh x$$

(in Kurzfassung) sollten Sie sich selbst überlegen.

7.3.3 Trigonometrische Funktionen

Eine ähnliche Begründung mit Hilfe von Potenzreihen wie für den Grenzwert (7.10) zeigt, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{7.16}$$

Aus den in Abschnitt 6.4.2 vermerkten Identitäten

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \cos \frac{x + x_0}{2} \, \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}\,, \\
\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= -\sin \frac{x + x_0}{2} \, \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}
\end{aligned}$$

folgt zusammen mit dem Grenzwert (7.16) sofort die Differenzierbarkeit der Funktionen sin und cos auf $\mathbb{R}$ sowie die Identitäten

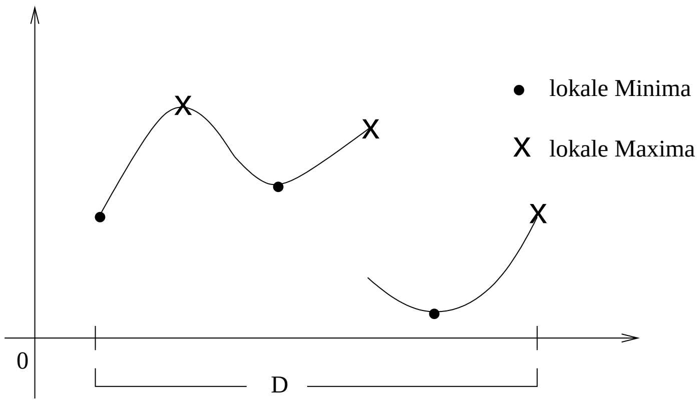
$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x.$$

Hiermit bekommt man auch leicht die Ableitungen der tan– bzw. cot–Funktion sowie der Arkusfunktionen ($\nearrow$ Übung).

7.4 Die Mittelwertsätze und der Satz von Taylor

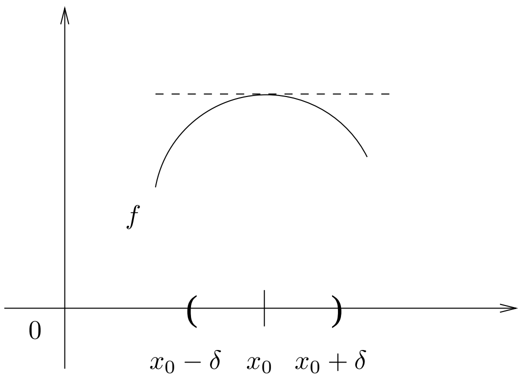
7.4.1 Der Satz von Rolle

Definition 7.8 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Die Funktion f hat in x_0 ein* lokales Minimum *(bzw. ein* lokales Maximum*), wenn es eine Umgebung U von x_0 so gibt, dass $f(x_0) \le f(x)$ für alle $x \in U \cap D$ (bzw. $f(x_0) \ge f(x)$ für alle $x \in U \cap D$).*



Lemma 7.9 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein innerer Punkt von D. Die Funktion f habe in x_0 ein lokales Maximum (Minimum) und sei in x_0 differenzierbar. Dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis Wir führen den Beweis für den Fall, dass in x_0 ein lokales Maximum vorliegt. Dazu wählen wir $\delta > 0$ so, dass $U := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$ und dass $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in U$.



Für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ gilt dann

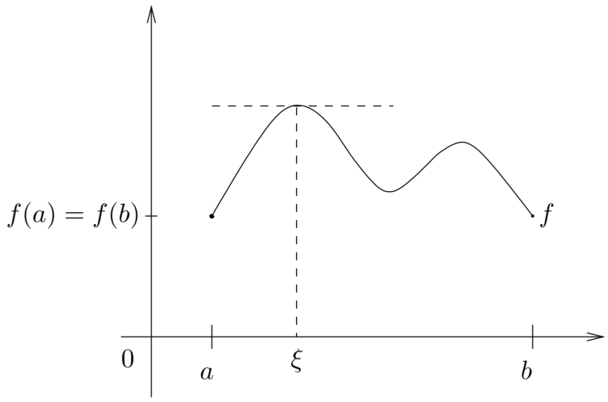
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \quad \text{und folglich} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

und für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad \text{und daher} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

Also ist $f'(x_0) = 0$. ■

Satz 7.10 (Rolle) *Sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b), und es sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*



Beweis Die Funktion f ist stetig auf $[a, b]$ und nimmt nach dem Satz von Weierstraß (Satz 6.39) ihr Supremum und ihr Infimum an. Es gibt also Punkte $\eta, \zeta \in [a, b]$ mit $f(\eta) \geq f(x) \geq f(\zeta)$ für alle $x \in [a, b]$. Falls $f(\eta) = f(\zeta)$, so ist f konstant auf $[a, b]$, und es gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei also $f(\eta) > f(\zeta)$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

(A) Es ist $f(a) = f(b) < f(\eta)$. Dann ist η innerer Punkt von $[a, b]$, und f besitzt ein lokales Maximum in η. Nach Lemma 7.9 ist $f'(\eta) = 0$.

(B) Es ist $f(a) = f(b) > f(\zeta)$. Dann ist ζ innerer Punkt von $[a, b]$, und f besitzt ein lokales Minimum in ζ. Nach Lemma 7.9 ist nun $f'(\zeta) = 0$. ■

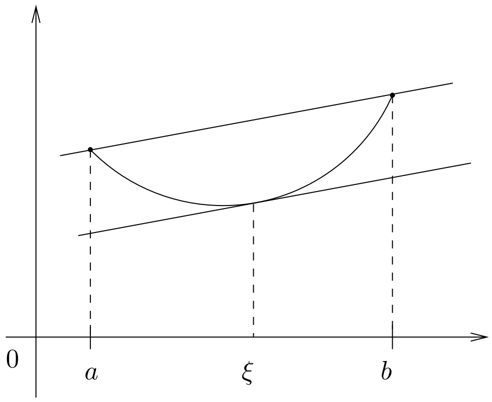
7.4.2 Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Durch Anwendung des Satzes von Rolle auf geeignete "Hilfsfunktionen" lassen sich weitere Existenzaussagen über "Zwischen– oder Mittelwerte" ableiten.

Satz 7.11 (Mittelwertsatz) *Die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es einen Punkt $\zeta \in (a, b)$ so, dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta).$$

Geometrische Interpretation: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist der Anstieg der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$, und $f'(\zeta)$ ist der Anstieg einer dazu parallelen Tangente an den Graphen von f.



Beweis Für $x \in [a,b]$ sei

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a).$$

Die Funktion h ist stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf (a,b), und es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\zeta \in (a,b)$ so, dass

$$h'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$ ■

Folgerung 7.12 *Sei f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b).*

(a) *Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f konstant auf $[a,b]$.*

(b) *Ist $f'(x) > 0$ (bzw. < 0) für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend) auf $[a,b]$.*

Beweis Wir zeigen nur Aussage (a). Der Beweis von Aussage (b) verläuft analog. Seien $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\zeta \in (x_1, x_2)$ mit

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\zeta).$$

Nach Voraussetzung ist $f'(\zeta) = 0$. Also ist $f(x_1) = f(x_2)$ für beliebige $x_1, x_2 \in [a,b]$. ■

Folgerung 7.13 *Sei f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Die Funktion f ist genau dann monoton wachsend (bzw. fallend) auf $[a,b]$, wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $x \in (a,b)$.*

Die Implikation $\Longrightarrow$ zeigt man wie im Beweis von Lemma 7.9, und die Implikation $\Longleftarrow$ wie im Beweis von Folgerung 7.12.

Folgerung 7.14 *Seien f und g stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), und sei $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Dann unterscheiden sich f und g nur um eine Konstante.*

Dies folgt unmittelbar aus Folgerung 7.12 (a), angewandt auf die Funktion $f - g$.

Satz 7.15 (Zweiter oder Erweiterter Mittelwertsatz) *Seien f und g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b), und es sei $g(a) \neq g(b)$ sowie $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es ein $\zeta \in (a, b)$ so, dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} .$$

Beweis Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \Big(g(x) - g(a)\Big). \qquad \blacksquare$$

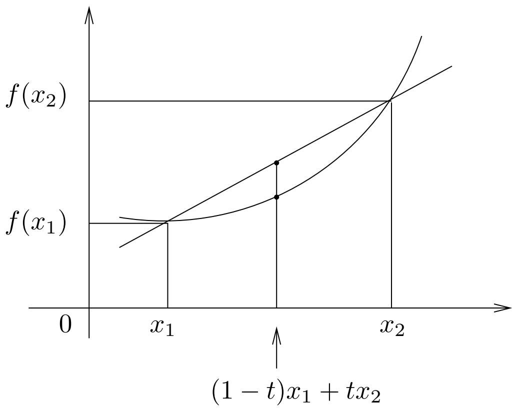
7.4.3 Konvexität und höhere Ableitungen

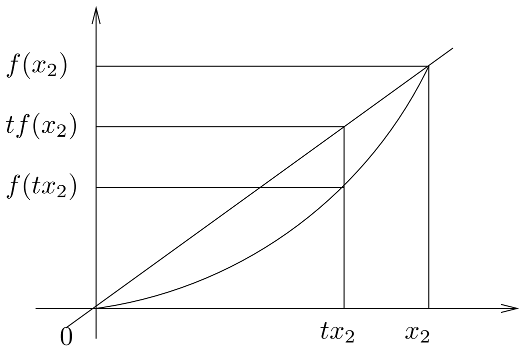
Definition 7.16 *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ und für alle $t \in [0, 1]$ gilt*

$$f\Big((1 - t)x_1 + tx_2\Big) \leq (1 - t)f(x_1) + t\, f(x_2). \tag{7.17}$$

Steht in (7.17) für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ und alle $t \in [0, 1]$ das Relationszeichen $\geq$, so heißt f konkav *.*

Geometrische Deutung Der Graph einer konvexen (konkaven) Funktion liegt unterhalb (oberhalb) der Verbindungsstrecke zweier beliebiger seiner Punkte.





Spezialfall $x_1 = f(x_1) = 0$

Die Konvexität differenzierbarer Funktionen lässt sich wie folgt charakterisieren.

Satz 7.17 *Sei f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex auf $[a, b]$, wenn die Ableitung f' auf (a, b) monoton wachsend ist.*

Beweis Sei zunächst f konvex und $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ sowie $t \in [0, 1]$. Mit

$$x := (1 - t)x_1 + tx_2 \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad 1 - t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

können wir die Konvexitätsbedingung (7.17) äquivalent schreiben als

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2). \tag{7.18}$$

Ist nun speziell $a < x_1 < x_2 < b$ und $t \in (0,1)$, so ist $x - x_1 \neq 0$ und $x_2 - x \neq 0$, und man bekommt aus (7.18) leicht

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Außerdem ist f an den Stellen x_1 und x_2 differenzierbar. Der Grenzübergang $x \to x_1$ in der linken bzw. $x \to x_2$ in der rechten Ungleichung liefert

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

d.h. f' ist monoton wachsend auf (a,b). Sei nun umgekehrt f' monoton wachsend auf (a,b) und $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen $\zeta_1 \in (x_1, x)$ und $\zeta_2 \in (x, x_2)$ so, dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\zeta_1) \quad \text{und} \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\zeta_2).$$

Wegen der Monotonie von f' ist $f'(\zeta_1) \leq f'(\zeta_2)$, d.h.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Hieraus erhält man leicht (7.18) für alle $x \in (x_1, x_2)$. Für $x = x_1$ und $x = x_2$ ist (7.18) offenbar auch richtig. ■

Wir wissen aus Folgerung 7.13, dass man die Monotonie einer differenzierbaren Funktion f mit Hilfe ihrer Ableitung f' beschreiben kann. In Satz 7.17 benötigen wir die Monotonie der Ableitung. Diese können wir mit Mitteln der Differentialrechnung untersuchen, wenn f' differenzierbar ist.

Differenzierbare Funktionen auf (a,b), deren Ableitung f' auf (a,b) differenzierbar ist, heißen *zweimal differenzierbar*, und $(f')'$ heißt *zweite Ableitung* von f. Statt $(f')'$ schreibt man f''. Ganz analog erklärt man k mal differenzierbare Funktionen und k. Ableitungen. Als Bezeichnung für die k. Ableitung von f dient $f^{(k)}$ oder $\frac{d^k f}{dx^k}$. Mitunter ist es zweckmäßig, die Funktion f selbst als 0. Ableitung von f zu betrachten. Man schreibt dann auch $f = f^{(0)}$. Aus Satz 7.17 und Folgerung 7.13 schließen wir:

Folgerung 7.18 *Sei f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) zweimal differenzierbar. Dann ist f konvex auf $[a,b]$ genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$.*

Eine analoge Aussage gilt für konkave Funktionen.

7.4.4 Der Satz von Taylor

Wir schreiben den Mittelwertsatz in der Form

$$\exists \zeta \in (x_0, x) : \quad f(x) = f(x_0) + f'(\zeta)(x - x_0) \tag{7.19}$$

und interpretieren ihn neu: *Der Term $f'(\zeta)(x - x_0)$ beschreibt den Fehler, den wir begehen, wenn wir die Funktion f durch die konstante Funktion $f(x_0)$ approximieren*. Man kann nun daran denken, die Funktion f genauer zu approximieren, indem nicht nur (wie in (7.19)) konstante Funktionen, sondern Polynome zur Approximation zugelassen werden. Es ist naheliegend, diese Polynome P so zu wählen, dass nicht nur (wie in (7.19)) die Funktionswerte $f(x_0)$ und $P(x_0)$ übereinstimmen, sondern auch die Werte der Ableitungen $f'(x_0) = P'(x_0)$, $f''(x_0) = P''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0)$, wobei n der Grad des Polynoms ist. Wir überlegen uns zunächst, wie ein solches Polynom aussieht und machen dazu den Ansatz

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n.$$

Offenbar ist $P(x_0) = a_0$. Weiter ist

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

und folglich $P'(x_0) = a_1$. Aus

$$P''(x) = 2a_2 + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

folgt $a_2 = \frac{1}{2}\, P''(x_0)$. Allgemein findet man

$$a_k = \frac{1}{k!}\, P^{(k)}(x_0),$$

was mit den Vereinbarungen $0! = 1$ und $P^{(0)} = P$ auch für $k = 0$ richtig ist. Es ist somit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, P^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Ist f eine in x_0 n mal differenzierbare Funktion, so wird also durch

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{7.20}$$

ein Polynom von Grad $\leq n$ definiert, welches im Punkt x_0 in allen Ableitungen bis zur n. mit der Funktion f übereinstimmt. Dieses Polynom heißt *Taylorpolynom* von f vom Grad n. Der Fehler, der beim Ersetzen von f durch das Polynom (7.20) gemacht wird, wird in folgendem Satz beschrieben. Dazu vereinbaren wir, eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die auf D n mal differenzierbar ist, *n mal stetig differenzierbar auf D* zu nennen, wenn ihre n. Ableitung stetig auf D ist.

Satz 7.19 (Taylor) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n mal stetig differenzierbar, und auf (a,b) existiere die $n+1$. Ableitung. Dann gibt es ein $\zeta \in (a,b)$ so, dass*

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k}_{\text{Taylorpolynom } n. \text{ Grades}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{Restglied nach Lagrange}} . \tag{7.21}$$

Beweis Wir definieren eine Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - m\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

wobei wir $m \in \mathbb{R}$ so wählen, dass $h(a) = 0$. Die Funktion h ist stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf (a,b), und es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Ihre Ableitung im Punkt $x \in (a,b)$ ist

$$h'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + m\frac{(b-x)^n}{n!} \tag{7.22}$$

(Nachrechnen!). Nach Rolle existiert ein $\zeta \in (a,b)$ mit $h'(\zeta) = 0$. Aus (7.22) erhält man dann für m

$$-\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(b-\zeta)^n + m\frac{(b-\zeta)^n}{n!} = 0 \quad \text{bzw.} \quad m = f^{(n+1)}(\zeta).$$

Wir setzen diesen Wert in die Definition von h ein, wählen $x = a$ und erhalten die Darstellung (7.21). ∎

Beispiel A Wir betrachten die Funktion $f : x \mapsto \ln(1+x)$ und wählen $a = 0$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ und $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ für $k \geq 2$ und daher

$$f(0) = 0, \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Einsetzen in die Taylorsche Formel (7.21) mit $b := x > -1$ liefert

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(1+\zeta)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

mit einem $\zeta \in (0,x)$. Für $x = 1$ ist insbesondere $\zeta \in (0,1)$ und folglich

$$\left|(-1)^n \frac{1}{(1+\zeta)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Damit ist klar: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ konvergiert, und ihre Summe ist $\ln 2$. Zur näherungsweisen Berechnung von $\ln 2$ ist diese Reihe allerdings ungeeignet, da sie zu langsam konvergiert. ∎

Beispiel B Für $f(x) = e^x$ und $a = 0$ ist $f^{(k)}(a) = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\zeta}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit einem $\zeta \in (0, x)$. Für $x = 1$ ist insbesondere

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{c_n}{(n+1)!} ,$$

mit $c_n \in (1, e)$ (man beachte, dass ζ von n abhängen kann). Wir wollen diese Darstellung nutzen, um die Irrationalität von e zu zeigen. Angenommen, e ist rational. Dann ist $e = m/n$ mit natürlichen Zahlen m und n. O.E.d.A. nehmen wir $n \geq 3$ an. Dann ist

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{c_n}{(n+1)!} .$$

Multiplikation mit $n!$ liefert

$$(n-1)!m - n!\Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\Big) = \frac{c_n}{n+1} .$$

Auf der linken Seite steht eine ganze Zahl, und auf der rechten Seite wegen

$$\frac{1}{n+1} < \frac{c_n}{n+1} < \frac{3}{4} < 1$$

eine Zahl in $(0, 1)$. Dies ist offenbar unmöglich. Also ist e irrational. ■

7.4.5 Taylorreihen und Potenzreihen

In der Taylorschen Formel (7.21) haben wir eine genügend oft differenzierbare Funktion f durch ihr Taylorpolynom $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^n$ ersetzt und den dabei entstehenden Fehler beschrieben. Ist f unendlich oft differenzierbar, so können wir das Taylorpolynom für jedes n bilden und uns fragen, was beim Grenzübergang $n \to \infty$ passiert. Die formal entstehende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{7.23}$$

heißt *Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt x_0*. Zwei Fragen sind naheliegend:

- Konvergiert die Taylorreihe für alle x aus einer Umgebung von x_0?

- Wenn ja, stimmt sie dann an der Stelle x mit $f(x)$ überein?

Die Antwort auf die erste Frage haben wir bereits in Abschnitt 6.3 gegeben. Die Taylorreihe (7.23) ist nichts anderes als eine um x_0 verschobene Potenzreihe. Es sind daher drei Fälle möglich

- die Reihe (7.23) konvergiert nur für $x = x_0$.
- die Reihe (7.23) konvergiert für $|x - x_0| < r$ absolut und divergiert für $|x - x_0| > r$ mit einem $r > 0$, dem Konvergenzradius der verschobenen Potenzreihe.
- die Reihe (7.23) konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Welcher dieser Fälle eintritt, kann mit der Formel von Cauchy–Hadamard für den Konvergenzradius entschieden werden. Zur Beantwortung der zweiten Frage betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel C Sei $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$. Dann ist $f^{(k)}(0) = 1$ für alle k, und die Taylorreihe von f stimmt mit der die Funktion $f = \exp$ definierenden Potenzreihe überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,. \qquad \blacksquare$$

Beispiel D Die durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

erklärte Funktion ist ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ($\nearrow$ Übung). Offenbar konvergiert also die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen 0. Es ist aber $f(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$. $\blacksquare$

Es gibt also unendlich oft differenzierbare Funktionen, deren Taylorreihe überall konvergiert, bei denen aber Taylorreihe und Funktion nur im Entwicklungspunkt übereinstimmen.

Definition 7.20 *Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei auf (a,b) unendlich oft differenzierbar. Dann heißt f auf (a,b)* reell analytisch *, wenn für jedes $x_0 \in (a,b)$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in (a,b) \cap U_\delta(x_0)$ die Taylorreihe von f um x_0 konvergiert und mit der Funktion f übereinstimmt:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \forall x \in (a,b) \cap U_\delta(x_0).$$

Die exp–Funktion aus Beispiel **C** ist auf ganz $\mathbb{R}$ reell analytisch, die Funktion aus Beispiel **D** dagegen nur auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Später werden wir zeigen:

Satz 7.21 *Die Funktion f sei durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ definiert. Dann ist f auf $(-r, r)$ reell analytisch, und die Taylorreihe von f um den Punkt 0 stimmt auf diesem Intervall mit der definierenden Potenzreihe überein.*

7.5 Einige Anwendungen der Differentialrechnung

7.5.1 Kurvendiskussion

Unter Kurvendiskussion versteht man die Aufgabe, sich Informationen über den Verlauf des Graphen einer gegebenen Funktion zu verschaffen. Typische Fragen sind etwa

– Stetigkeit und Differenzierbarkeit,

– Verhalten an Häufungspunkten des Definitionsbereichs (Existenz einseitiger Grenzwerte, Polstellen),

– bei unbeschränktem Definitionsbereich: Verhalten im Unendlichen (Asymptoten),

– Periodizität,

– Monotonieverhalten (wachsend/fallend) und Punkte, in denen sich das Monotonieverhalten ändert (lokale Maxima und Minima),

– Krümmungsverhalten (konvex/konkav) und Punkte, in denen sich das Krümmungsverhalten ändert (Wendepunkte).

Besonders die beiden letzten Fragen lassen sich für differenzierbare Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung effektiv untersuchen. Für genügend oft differenzierbare Funktionen wissen wir bereits:

- f hat in x_0 lokales Extremum $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$ (Lemma 7.9).
- f ist monoton wachsend (fallend) $\Longleftrightarrow f' \geq 0\,(f' \leq 0)$ (Folgerung 7.13).
- f ist konvex/konkav $\Longleftrightarrow f'' \geq 0\,(f'' \leq 0)$ (Folgerung 7.18).

Für lokale Extrema haben wir bislang nur eine notwendige Bedingung angegeben. Wir ergänzen dies durch eine hinreichende Bedingung.

Satz 7.22 *Sei f differenzierbar in $(a, b), x_0 \in (a, b), f'(x_0) = 0$, und f' wechsele in x_0 das Vorzeichen, d.h. es gibt eine Umgebung $U \subseteq (a, b)$ von x_0 so, dass*

$$f'(x) \geq 0 \quad \textit{für} \quad x \in U, x < x_0 \quad \textit{und} \quad f'(x) \leq 0 \quad \textit{für} \quad x \in U, x > x_0 \tag{7.24}$$

oder

$$f'(x) \leq 0 \quad \textit{für} \quad x \in U, x < x_0 \quad \textit{und} \quad f'(x) \geq 0 \quad \textit{für} \quad x \in U, x > x_0. \tag{7.25}$$

Im Fall (7.24) *besitzt f ein lokales Maximum in x_0, und im Fall* (7.25) *ein lokales Minimum.*

Den Beweis erhält man sofort aus Folgerung 7.13. Ist z.B. $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in U$ mit $x < x_0$, so ist f auf $\{x \in U : x \leq x_0\}$ monoton wachsend und folglich $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$ mit $x \leq x_0$. ∎

Hausaufgabe: Was kann man aussagen, falls in (7.24) bzw. (7.25) die Zeichen $>$ und $<$ statt $\geq$ und $\leq$ stehen?

Satz 7.23 *Sei $n \geq 2$ und f in (a, b) n mal stetig differenzierbar, $x_0 \in (a, b)$, und es sei $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ist n gerade, so besitzt f in x_0 einen lokalen Extremwert, und zwar ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$, und ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$. Ist n ungerade, liegt kein Extremwert vor.*

Beweis Für $x \in (a, b)$ liefert der Taylorsche Satz die Existenz eines $\zeta \in (x_0, x)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Sei n gerade und beispielsweise $f^{(n)}(x_0) > 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ eine Umgebung U von x_0, auf der $f^{(n)}$ positiv ist. Für $x \in U$ ist auch $\zeta \in U$, und wir erhalten

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x - x_0)^n > 0 \quad \text{für alle } x \in U \backslash \{x_0\}.$$

Also besitzt f in x_0 ein (sogar echtes) lokales Minimum. Den Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ behandelt man analog. Ist dagegen n ungerade, so wechselt $(x - x_0)^n$ und damit auch $\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x - x_0)^n$ sein Vorzeichen. In diesem Fall kann f kein lokales Extremum in x_0 besitzen. ∎

Ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ heißt *Wendepunkt* von $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, wenn es eine Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ von x_0 gibt, so dass f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex (bzw. konkav) und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav (bzw. konvex) ist.

Satz 7.24 (*a*) *Sei f in (a,b) zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$ ein Wendepunkt von f. Dann ist $f''(x_0) = 0$.*

(*b*) *Sei $n \geq 3$ und f in (a,b) n mal stetig differenzierbar, und für $x_0 \in (a,b)$ gelte $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 2, \ldots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann ist x_0 Wendepunkt, falls n ungerade ist, und kein Wendepunkt, falls n gerade ist.*

Beweis (*a*) Sei $x_0 \in (a,b)$ Wendepunkt von f, und sei f für ein $\varepsilon > 0$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav. Nach Folgerung 7.18 ist dann $f'' \geq 0$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'' \leq 0$ auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Die Stetigkeit von f'' an der Stelle x_0 impliziert $f''(x_0) = 0$.
(*b*) Der Taylorsche Satz, aufgeschrieben für die Funktion f'' an der Stelle x_0, liefert

$$f''(x) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}$$

bzw.

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} \quad \text{mit einem } \zeta \in (x_0, x). \tag{7.26}$$

Ist z.B. $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist $f^{(n)}(x) < 0$ für alle x aus einer Umgebung $U \subseteq (a,b)$ von x_0. Liegt x in U, so liegt erst recht ζ in U. Ist nun n ungerade sowie $x \in U$ und $x < x_0$, so folgt aus (7.26), dass $f''(x) > 0$. Nach Folgerung 7.18 ist f konvex auf $\{x \in U : x \leq x_0\}$. Unter gleichen Voraussetzungen erhält man, dass f auf $\{x \in U : x \geq x_0\}$ konkav ist. In diesem Fall ist x_0 also Wendepunkt. Die übrigen Fälle diskutiert man analog. ∎

7.5.2 Bestimmung von Grenzwerten

Die folgende *Regel von de l'Hospital* hilft bei der Bestimmung von Grenzwerten von Brüchen der Gestalt "0/0".

Satz 7.25 (de l'Hospital) *Die Funktionen f und g seien auf (a,b) n mal stetig differenzierbar, in $x_0 \in (a,b)$ gelte $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ sowie $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und ist gleich $\frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$.*

Beweis Der Satz von Taylor liefert für $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 + 0 + \ldots + 0 + (x - x_0)^n f^{(n)}(\zeta_x)/n!}{0 + 0 + \ldots + 0 + (x - x_0)^n g^{(n)}(\eta_x)/n!} = \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{g^{(n)}(\eta_x)}$$

mit gewissen Zahlen ζ_x und η_x zwischen x_0 und x (man beachte, dass wegen $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ und wegen der Stetigkeit von $g^{(n)}$ auch $g^{(n)}(\eta_x) \neq 0$ für alle η_x aus einer hinreichenden kleinen Umgebung von x_0 ist). Für $x \to x_0$ konvergieren auch

ζ_x und η_x gegen x_0, und aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ sowie aus $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{g^{(n)}(\eta_x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel Für $a > 0$ und $\alpha, \beta > 0$ ist

$$\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{\alpha a^{\alpha-1}}{\beta a^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\, a^{\alpha-\beta}. \qquad \blacksquare$$

Die Regel von de l'Hospital gilt auch, wenn unbestimmte Ausdrücke der Gestalt "∞/∞" vorliegen (vgl. Barner/Flohr, S. 276 – 277). So ist z.B.

$$\lim_{x\searrow 0} x \ln x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0} -x = 0.$$

In diesem Beispiel haben wir einen unbestimmten Ausdruck $0 \cdot \infty$ in die Form ∞/∞ gebracht und darauf de l'Hospital angewandt. Ähnlich lassen sich zahlreiche weitere Grenzwerte, die auf unbestimmte Ausdrücke wie $\infty - \infty, 1^\infty$ o.ä. führen, berechnen.

7.6 Differentiation vektorwertiger Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion. Bezeichnen wir für $t \in D$ die i Komponente des Vektors $f(t)$ mit $f_i(t)$, so können wir f schreiben als

$$f(t) = \Big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\Big) \quad \text{mit reellwertigen Funktionen} \quad f_i : D \to \mathbb{R}.$$

Definition 7.26 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, und $t_0 \in D$ sei Häufungspunkt von D. Die Funktion heißt* differenzierbar in t_0, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Big(f(t_0 + h) - f(t_0)\Big)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Ableitung *von f an der Stelle t_0 und wird mit $\frac{df}{dt}(t_0)$ oder $f'(t_0)$ bezeichnet.*

Satz 7.27 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, und $t_0 \in D$ sei Häufungspunkt von D. Die Funktion f ist genau dann differenzierbar in t_0, wenn jede ihrer Koordinatenfunktionen in t_0 differenzierbar ist. In diesem Fall gilt*

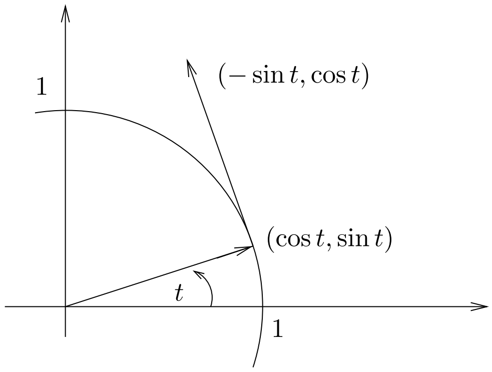
$$f'(t_0) = \Big(f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0)\Big).$$

Beweis Wegen

$$\frac{1}{h}\Big(f(t_0+h)-f(t_0)\Big) = \Big(\frac{f_1(t_0+h)-f_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{f_n(t_0+h)-f_n(t_0)}{h}\Big)$$

folgt die Behauptung sofort aus dem entsprechenden Satz für Grenzwerte von Folgen von Vektoren (Satz 4.13). ∎

Beispiel Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann ist f überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Man beachte: $f'(t)$ beschreibt gerade die Richtung der Tangente an die Kurve $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ im Punkt $f(t)$. Wir kommen darauf noch zurück. ∎



Mit Satz 7.27 lassen sich viele Eigenschaften reellwertiger Funktionen auf vektorwertige Funktionen übertragen. Zum Beispiel gilt:

- Ist f in t_0 differenzierbar, so ist f in t_0 stetig.
- Sind f, g in t_0 differenzierbar, so ist $f + g$ in t_0 differenzierbar, und
$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$
- Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in t_0 differenzierbar und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ in $g(t_0)$, so ist $f \circ g$ in t_0 differenzierbar, und
$$(f \circ g)'(t_0) = f'\Big(g(t_0)\Big) \cdot g'(t_0).$$

Dagegen gilt der Mittelwertsatz NICHT in seiner gewohnten Form.

Beispiel Sei wieder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Dann gibt es KEINE Zahl $\zeta \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = f'(\zeta).$$

Einerseits ist nämlich $f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$, und andererseits ist

$$\|f'(\zeta)\| = \|(-\sin\zeta, \cos\zeta)\| = \sqrt{\sin^2\zeta + \cos^2\zeta} = 1$$

für jedes $\zeta \in \mathbb{R}$. ∎