Stochastische Analysis

Klaus Ritter

Darmstadt, SS 2009

Vorkenntnisse

Wahrscheinlichkeitstheorie.

Literatur

Insbesondere:

I. Karatzas, S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, New York, 1999.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Stochastische Prozesse

Literatur:

Karatzas, Shreve (1999, Chap. 1).

1 Grundlegende Definitionen

1.1 Stochastische Prozesse und Filtrationen

Definition 1. Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, Meßraum $(S, \mathfrak{S})$ sowie Menge I.

(i) *Stochastischer Prozeß* mit *Zustandsraum* $(S, \mathfrak{S})$ und *Parametermenge* I: Familie $X = (X_t)_{t \in I}$ von $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-meßbaren Abbildungen[1] $X_t : \Omega \to S$.

(ii) *Trajektorie (Pfad, Realisierung)* von X: Abbildung $I \to S$, $t \mapsto X_t(\omega)$ mit festem $\omega \in \Omega$.

Beispiel 1.

(i) $I = \mathbb{N}_0$: Grenzwertsätze der Stochastik, zeit-diskrete Martingaltheorie, siehe „Probability Theory".

(ii) $I = \{1, \dots, n\}^2$: Bildverarbeitung, siehe Winkler (1995).

(iii) $I = \mathbb{Z}^d$: statistische Physik, siehe Georgii (1988).

(iv) $I = \mathbb{R}^d$: Geostatistik, siehe Cressie (1993).

Fortan,[2] bis auf Abschnitt 4,

$$I \subset \mathbb{R}, \quad S = \mathbb{R}^d, \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \text{ Borelsche } \sigma\text{-Algebra.}$$

In erster Linie

$$I = [0, t_0] \quad \text{bzw.} \quad I = [0, \infty[\,.$$

[1] Alternative Schreibweisen: $X(t)$, $X(t, \cdot)$.

[2] Notation: Inklusion $\subset$ nicht notwendig strikt.

Beispiel 2. Finanzmarkt mit d Finanzgütern. Modelliert durch Preisprozeß X: für $j \in \{1, \dots, d\}$ ist $X_{j,t}$ der Preis des j-ten Finanzgutes zur Zeit $t \in I$.

Gegeben: Prozesse $X = (X_t)_{t \in I}$ und $Y = (Y_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Definition 2.

(i) X und Y *ununterscheidbar*, falls P-f.s.[3]

$$\forall\, t \in I : \quad X_t = Y_t.$$

(ii) Y *Modifikation (Version)* von X, falls

$$\forall\, t \in I : \quad P(\{X_t = Y_t\}) = 1.$$

(iii) X und Y *besitzen dieselben endlich-dimensionalen Randverteilungen*, falls[4]

$$\begin{aligned} &\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, t_1, \dots, t_n \in I \quad \forall\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{nd}) : \\ &\qquad P(\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\}) = P(\{(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in B\}). \end{aligned}$$

Bemerkung 1. Klar: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Umkehrungen i.a. falsch. Jedoch: (i) $\Leftrightarrow$ (ii), falls X und Y P-f.s. rechtsseitig (linksseitig) stetige Pfade besitzen. Siehe Übung 1.1, 1.2.

Definition 3.

(i) *Filtration*: Familie $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ von σ-Algebren $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{A}$ mit

$$\forall\, s, t \in I : \quad s < t \;\Rightarrow\; \mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t.$$

(ii) X *adaptiert* zu Filtration $\mathfrak{F}$, falls X_t $\mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{S}$-meßbar für alle $t \in I$.

(iii) *Kanonische Filtration* zu X:

$$\mathfrak{F}_t^X = \sigma\left(\{X_s : s \le t\}\right), \qquad t \in I.$$

Bemerkung 2. Klar: $\mathfrak{F}^X$ ist die kleinste Filtration, zu der X adaptiert ist.

Proposition 1. Gegeben: Menge Ω_1 und Meßraum $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$. Für Abbildungen $U : \Omega_1 \to \Omega_2$, $V : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ sind äquivalent

(i) V ist $\sigma(\{U\})$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar,

(ii) $\exists\, g : \Omega_2 \to \mathbb{R} : \quad g$ $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar $\wedge$ $V = g \circ U$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): klar. (i) $\Rightarrow$ (ii): Algebraische Induktion, d.h. zunächst für Elementarfunktionen, dann für nicht-negative meßbare Funktionen über monotone Limiten, schließlich der allgemeine Fall durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil. Details im Skript „Probability Theory“. $\square$

[3] Eigenschaft a gilt P-f.s.: $\exists\, A \in \mathfrak{A} : \; P(A) = 1 \wedge A \subset \{\omega \in \Omega : \omega \text{ erfüllt } a\}$.

[4] Analog für Prozesse auf verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen.

Bemerkung 3. Setze[5][6] $\Omega_2 = S^{[0,t]}$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{S}^{[0,t]}$, definiere $U : \Omega \to \Omega_2$ durch

$$(U(\omega))(s) = X_s(\omega).$$

Dann $\sigma(\{U\}) = \mathfrak{F}_t^X$, denn für jede σ-Algebra $\mathfrak{A}'$ in Ω gilt

$$U\ \mathfrak{A}'\text{-}\mathfrak{A}_2\text{-meßbar} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, s \in [0,t] : X_s\ \mathfrak{A}'\text{-}\mathfrak{S}\text{-meßbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{A}'.$$

Somit für $A \subset \Omega$

$$A \in \mathfrak{F}_t^X \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, B \in \mathfrak{A}_2 : A = U^{-1}(B).$$

Für $V : \Omega \to \mathbb{R}$ zeigt Proposition 1, daß V genau dann $\mathfrak{F}_t^X$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar ist, wenn

$$\forall\, \omega \in \Omega : \quad V(\omega) = g\left(X_\cdot(\omega)|_{[0,t]}\right)$$

mit einer $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbaren Abbildung $g : S^{[0,t]} \to \mathbb{R}$.

Beispiel 3. Filtration $\mathfrak{F}$ beschreibt den Informationsverlauf in einem Finanzmarkt, alle „Aktionen“ zur Zeit $t \in I$ müssen $\mathfrak{F}_t$-meßbar sein. Sinnvolle Forderung: Preisprozeß X adaptiert zu $\mathfrak{F}$, d.h. $\mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{F}_t$ für alle $t \in I$.

Kontinuierliches Finanzmarktmodell für d Finanzgüter mit Zeithorizont $t_0 > 0$: Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und dazu adaptierter $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$, wobei $I = [0, t_0]$.

Handelsstrategie $H = (H_t)_{t\in I}$ in obigem Modell: $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozeß auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum. Für $j \in \{1,\dots,d\}$: $H_{t,j}$ Bestand an Finanzgut j zur Zeit $t \in I$. Sinnvolle Forderung: H zu $\mathfrak{F}$ adaptiert.

Im folgenden sei $I = [0,\infty[$. Gegeben: Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ in $\mathfrak{A}$.

Definition 4. $\mathfrak{F}$ *rechtsseitig stetig*, falls

$$\forall\, t \in I : \quad \mathfrak{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathfrak{F}_{t+\varepsilon}.$$

Definition 5.

(i) X *meßbar*, falls

$$I \times \Omega \to S, \quad (t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$$

$(\mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A})$-$\mathfrak{S}$-meßbar ist.

(ii) X *progressiv meßbar* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls für jedes $t \geq 0$ die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \to S, \quad (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$$

$(\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t)$-$\mathfrak{S}$-meßbar ist.

Bemerkung 4. Klar: progressiv meßbar $\Rightarrow$ meßbar und adaptiert[7].

[5] Analog mit anderen Pfadräumen, etwa $\Omega_2 = C([0,t])$ und $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}(\Omega_2)$. Siehe Prop. II.4.

[6] Notation $\mathfrak{S}^{[0,t]} = \bigotimes_{s\in[0,t]} \mathfrak{S}$.

[7] Ferner: meßbar und adaptiert $\Rightarrow$ Existenz einer progressiv meßbaren Modifikation, siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 5).

Kurz: X *stetig*, falls alle Pfade von X stetig sind. Analog für rechtsseitige und linksseitige Stetigkeit.

Proposition 2.

$$X \text{ adaptiert und rechtsseitig (linksseitig) stetig} \quad \Rightarrow \quad X \text{ progressiv meßbar.}$$

Beweis. Im Falle rechtsseitiger Stetigkeit. Fixiere $t > 0$, setze $I_0^{(n)} = \{0\}$ und $I_k^{(n)} =](k-1)/2^n \cdot t, k/2^n \cdot t]$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, 2^n$. Definiere

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_{k/2^n \cdot t}(\omega), \quad \text{falls } s \in I_k^{(n)}.$$

Dann folgt für alle $\omega \in \Omega$ und $s \in [0,t]$

$$\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega).$$

Ferner gilt für $B \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned}\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : X_s^{(n)}(\omega) \in B\} &= \bigcup_{k=0}^{2^n} \{(s,\omega) \in I_k^{(n)} \times \Omega : X_{k/2^n\cdot t}(\omega) \in B\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{2^n} \left(I_k^{(n)} \times \{X_{k/2^n \cdot t} \in B\} \right) \in \mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t.\end{aligned}$$

□

Definition 6. X *cadlag*[8] Prozeß, falls jeder Pfad in jedem Punkt $t \geq 0$ rechtsseitig stetig ist und in jedem Punkt $t > 0$ einen linksseitigen Grenzwert besitzt.

1.2 Stoppzeiten

Gegeben: Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ auf Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$. Betrachte Abbildungen $T : \Omega \to I \cup \{\infty\}$.

Definition 7.

(i) T *Stoppzeit* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls

$$\forall\, t \in I : \quad \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

(ii) T *optionale Zeit* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls

$$\forall\, t \in I : \quad \{T < t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Im folgenden sei $I = [0, \infty[$.

[8] Continu à droite, limites à gauche.

Bemerkung 5. Betrachte die kanonische Filtration $\mathfrak{F}^X$. Genau dann ist T Stoppzeit bzgl. $\mathfrak{F}^X$, wenn für jedes $t \in I$ eine Menge $B \in \mathfrak{S}^{[0,t]}$ mit

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega : X_.(\omega)|_{[0,t]} \in B\}$$

existiert, siehe Bemerkung 3.

Beispiel 4. T Verkaufsstrategie für eine Aktie oder Ausübungsstrategie für amerikanische Option. Letztere gibt dem Inhaber der Option das Recht, innerhalb eines Zeitraumes $[0, t_0]$ ein Basisgut (etwa eine Aktie) zu einem festgelegten Basispreis zu kaufen (Call) bzw. zu verkaufen (Put). Sinnvolle Forderung: T Stoppzeit.

Proposition 3.

$$T \text{ Stoppzeit} \qquad \Rightarrow \qquad T \text{ optionale Zeit.}$$

Hier gilt „$\Leftrightarrow$“ im Falle einer rechtsseitig stetigen Filtration.

Beweis. „$\Rightarrow$“

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{T \leq t - 1/n\}}_{\in \mathfrak{F}_{t-1/n}} \in \mathfrak{F}_t.$$

„$\Leftarrow$“ Für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \underbrace{\{T < t + 1/n\}}_{\in \mathfrak{F}_{t+1/n}} \in \mathfrak{F}_{t+1/m}.$$

Mit der Stetigkeitsannahme folgt $\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$. □

Proposition 4. Mit $S, T, T_1, \dots$ sind auch $S+T$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ Stoppzeiten bzgl. $\mathfrak{F}$. Im Falle einer rechtsseitig stetigen Filtration gilt dies auch für $\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

Beweis. Für die Summe. Es gilt

$$\begin{aligned}&\{S + T > t\}\\ &\quad = \underbrace{\{S = 0, T > t\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \cup \{0 < S < t, S + T > t\} \cup \underbrace{\{S = t, T > 0\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \cup \underbrace{\{S > t\}}_{\in \mathfrak{F}_t}\end{aligned}$$

sowie

$$\{0 < S < t, S + T > t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]0,t[} \underbrace{\{r < S < t, T > t - r\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t.$$

□

Definition 8. *Eintrittszeit* in $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$:[9]

$$H_\Gamma(\omega) = \inf\{t \in I : X_t(\omega) \in \Gamma\}.$$

Beispiel 5. Verkaufe Aktie, sobald erstmals der Preis a erreicht oder überschritten ist, also $\Gamma = [a, \infty[$ im Falle $d = 1$.

[9] Wie üblich: $\inf \emptyset = \infty$.

Proposition 5. Sei X zu $\mathfrak{F}$ adaptiert. Dann

(i) X rechtsseitig stetig $\wedge$ Γ offen $\Rightarrow$ H_Γ optionale Zeit.

(ii) X stetig $\wedge$ Γ abgeschlossen $\Rightarrow$ H_Γ Stoppzeit.

Beweis. ad (i): Es gilt

$$\{H_\Gamma < t\} = \bigcup_{s \in [0,t[} \{X_s \in \Gamma\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t[} \underbrace{\{X_s \in \Gamma\}}_{\in \mathfrak{F}_s} \in \mathfrak{F}_t.$$

ad (ii): Übung 1.4.b). □

Gegeben: Stoppzeit T.

Definition 9. *σ-Algebra der T-Vergangenheit*:

$$\mathfrak{F}_T = \{A \in \mathfrak{A} : \forall\, t \in I : A \cap \{T \le t\} \in \mathfrak{F}_t\}.$$

Bemerkung 6. Klar: $\mathfrak{F}_T$ ist σ-Algebra und T ist $\mathfrak{F}_T$-$\mathfrak{B}(I \cup \{\infty\})$-meßbar.

Betrachte den Prozeß X zur Stoppzeit T,

$$X_T : \{T < \infty\} \to S, \qquad X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega),$$

und den gestoppten Prozeß[10]

$$(X_{T\wedge t})_{t \in I}.$$

Proposition 6. Sei X progressiv meßbar. Dann

(i) X_T ist $\mathfrak{F}_T$-$\mathfrak{S}$-meßbar.

(ii) $(X_{T\wedge t})_{t\in I}$ ist progressiv meßbar.

Beweis. ad (ii): Fixiere $t > 0$, setze $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}([0,t])$. Die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \to [0,t] \times \Omega, \quad (s,\omega) \mapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$$

ist $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-meßbar[11]. Die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \to S, \quad (z,\omega) \mapsto X_z(\omega)$$

ist n.V. $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{S}$-meßbar. Betrachte die Komposition.
ad (i): Es gilt

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \le t\} = \underbrace{\{X_{T\wedge t} \in B\}}_{\in \mathfrak{F}_t \text{ wg. (ii)}} \cap \underbrace{\{T \le t\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t$$

für $B \in \mathfrak{S}$. □

[10] Notation $\wedge$ für min.

[11] $\{T \wedge s \le u\} = [0,t] \times \{T \le u\} \cup [0,u] \times \Omega.$

2 Der Poisson-Prozeß

Betrachte Folge $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von iid. Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, jeweils exponentialverteilt[12] mit Parameter $\lambda > 0$. Setze $S_0 = 0$ und $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ für $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \leq t\}.$$

Klar: $P(\bigcup_{i=1}^\infty \{T_i \leq 0\}) = 0$ und[13] $P(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n < \infty\}) = 0$. OBdA: die komplementären Eigenschaften gelten auf ganz Ω.
Im folgenden $I = [0, \infty[$.

Definition 10. $X = (X_t)_{t\in I}$ *Poisson-Prozeß* mit Intensität $\lambda > 0$ bzgl. Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$, falls[14]

(i) X cadlag Prozeß mit Werten in $\mathbb{N}_0$,

(ii) X adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(iii) $X_0 = 0$,

(iv) für $0 \leq s < t$ ist $X_t - X_s$

  (a) unabhängig von $\mathfrak{F}_s$,
  (b) Poisson-verteilt[15] mit Parameter $\lambda(t-s)$.

Satz 1. $(N_t)_{t\in I}$ ist Poisson-Prozeß mit Intensität λ bzgl. $(\mathfrak{F}_t^N)_{t\in I}$.

Klar: es gilt (i)–(iii). Der Beweis von (iv) ergibt sich mit dem folgenden Lemma 2.

Lemma 1. Für $0 \leq s < t$ gilt

$$P(\{S_{N_s+1} > t\} \mid \mathfrak{F}_s^N) = \exp(-\lambda(t-s)).$$

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{F}_s^N$ und $t > s$. Zu zeigen:

$$P(\{S_{N_s+1} > t\} \cap A) = \exp(-\lambda(t-s)) \cdot P(A).$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ existiert $B \in \sigma(\{T_1, \ldots, T_n\})$ mit

$$A \cap \{N_s = n\} = B \cap \{N_s = n\},$$

[12]Für $t \geq 0$: $P(\{T_i \leq t\}) = 1 - \exp(-\lambda t)$; charakterisierende Eigenschaft (Gedächtnislosigkeit): $P(\{T_i \geq t\} \mid \{T_i \geq s\}) = P(\{T_i \geq t - s\})$ für $0 \leq s < t$.
[13]Starkes Gesetz der großen Zahlen: $S_n/n \to 1/\lambda$ P-f.s.
[14]Im folgenden oft kurz $X = Y$ oder $X \geq Y$, falls diese Eigenschaften f.s. gelten. Ebenso identifizieren wir Abbildungen, die f.s. übereinstimmen.
[15]Für $k \in \mathbb{N}_0$: $P(\{X_t - X_s = k\}) = (\lambda(t-s))^k/k! \cdot \exp(-\lambda(t-s))$.

siehe Bemerkung 3. Klar: T_{n+1} und $(S_n, 1_B)$ unabhängig. Somit

$$\begin{aligned}
P(\{S_{n+1} > t\} \cap A \cap \{N_s = n\}) &= P(\{T_{n+1} + S_n > t\} \cap B \cap \{S_n \le s\}) \\
&= \int_{t-s}^{\infty} P(\{S_n > t-u\} \cap B \cap \{S_n \le s\}) \cdot \lambda \exp(-\lambda u)\, du \\
&= \exp(-\lambda(t-s)) \cdot \int_{0}^{\infty} P(\{S_n > s-u\} \cap B \cap \{S_n \le s\}) \cdot \lambda \exp(-\lambda u)\, du \\
&= \exp(-\lambda(t-s)) \cdot P(\{S_{n+1} > s\} \cap \{S_n \le s\} \cap B) \\
&= \exp(-\lambda(t-s)) \cdot P(A \cap \{N_s = n\}).
\end{aligned}$$

Jetzt Summation über $n \in \mathbb{N}_0$. □

Lemma 2. Für $0 \le s < t$, $A \in \mathfrak{F}_s^N$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(A \cap \{N_t - N_s = k\}) = P(A) \cdot \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \exp(-\lambda(t-s)).$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Bezeichne mit φ_k die Dichte von

$$Y_k = \sum_{\ell=n+2}^{n+k+1} T_\ell.$$

Wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned}
z := P(A \cap \{N_t - N_s \le k\} \cap \{N_s = n\}) &= P(B \cap \{S_{n+k+1} > t\} \cap \{N_s = n\}) \\
= P(B \cap \{N_s = n\} \cap \{S_{n+1} + Y_k > t\}) & \\
= \int_0^\infty \underbrace{P(B \cap \{N_s = n\} \cap \{S_{n+1} + u > t\})}_{=:h(u)} \cdot \varphi_k(u)\, du. &
\end{aligned}$$

Weiter

$$\int_{t-s}^{\infty} h(u) \cdot \varphi_k(u)\, du = P(B \cap \{N_s = n\}) \cdot P(\{Y_k \ge t-s\}),$$

und der Beweis von Lemma 1 zeigt

$$\int_0^{t-s} h(u) \cdot \varphi_k(u)\, du = \int_0^{t-s} P(B \cap \{N_s = n\}) \cdot \exp(-\lambda(t-u-s)) \cdot \varphi_k(u)\, du.$$

Verwende[16]

$$\varphi_k(u) = \frac{\lambda^k u^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \exp(-\lambda u)$$

und

$$P(\{Y_k > u\}) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda u)^j}{j!} \cdot \exp(-\lambda u)$$

zum Nachweis von

$$z = P(A \cap \{N_s = n\}) \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda(t-s))^j}{j!} \exp(-\lambda(t-s)).$$

Jetzt Summation über $n \in \mathbb{N}$ etc. □

[16] Y_k ist Gamma-verteilt mit Parameter (λ, k).

Proposition 7. Die kanonische Filtration $(\mathfrak{F}_t^N)_{t\in I}$ ist rechtsseitig stetig.

Beweis. Wesentlich: die Pfade von N sind lokal rechtsseitig konstant. Siehe Protter (1990, p. 16) für allgemeines Ergebnis für Zählprozesse. □

Obige Konstruktion des Poisson-Prozesses ist universell. Es gibt verteilungsfreie Charakterisierungen des Poisson-Prozesses. Siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. VII.5).

Anwendungen des Poisson-Prozesses: z. Bsp. Warteschlangentheorie, Finanzmathematik, Versicherungsmathematik. Ausblick: Punktprozesse in $\mathbb{R}^d$.

3 Martingale

Gegeben: Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und adaptierter reellwertiger Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$\forall\, t \in I: \quad E(|X_t|) < \infty.$$

Kurzschreibweise: $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$, falls X an $\mathfrak{F}$ adaptiert.

Definition 11. $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ *Submartingal*, falls

$$\forall\, s, t \in I: \quad s < t \;\Rightarrow\; X_s \le E(X_t \mid \mathfrak{F}_s).$$

Supermartingal: „$\geq$“, *Martingal* „$=$“.

Beispiel 6. Für einen Poisson-Prozeß $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit Intensität $\lambda > 0$ und $0 \le s < t$ gilt

$$E(X_t \mid \mathfrak{F}_s) = E(X_t - X_s \mid \mathfrak{F}_s) + E(X_s \mid \mathfrak{F}_s) = E(X_t - X_s) + X_s = \lambda(t-s) + X_s.$$

Also liegt ein Submartingal vor.
Definiere einen *kompensierten Poisson-Prozeß* durch

$$M_t = X_t - \lambda t.$$

Dann ist $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein Martingal.

Die Martingaltheorie im kontinuierlichen Fall $I = [0, \infty[$ wird oft unter Rückgriff auf den vorab betrachteten diskreten Fall entwickelt. Wir diskutieren einige Elemente dieser Theorie.

3.1 Martingale in diskreter Zeit

Zunächst sei $I = \mathbb{N}_0$.

Beispiel 7. *Cox-Ross-Rubinstein Modell:* einfaches Modell für Aktienkurs zu Zeiten $t \in \mathbb{N}_0$. Wähle

$$A_0 > 0, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < d < u,$$

und betrachte $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ iid. mit

$$P(\{Y_t = u\}) = p = 1 - P(\{Y_t = d\}).$$

Definiere $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und

$$A_t = A_0 \cdot \prod_{s=1}^{t} Y_s, \qquad \mathfrak{F}_t = \sigma(\{Y_1, \ldots, Y_t\})$$

für $t \in \mathbb{N}$. Klar: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^A$. Für ganzzahlige $0 \le s < t$

$$E(A_t \mid \mathfrak{F}_s) = A_s \cdot E\left(\prod_{k=s+1}^{t} Y_k\right) = A_s \cdot E(Y_1)^{t-s} = (pu + (1-p)d)^{t-s} \cdot A_s.$$

Also

$$(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0} \text{ Submartingal} \qquad \Leftrightarrow \qquad E(Y_1) \ge 1$$

und

$$(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0} \text{ Martingal} \qquad \Leftrightarrow \qquad d < 1 < u \ \wedge \ p = \frac{1-d}{u-d}.$$

Wir sehen später: ein geeigneter Grenzübergang liefert die geometrische Brownsche Bewegung; auf diesem stochastischen Finanzmarktmodell basiert die Black-Scholes-Formel zur Bewertung europäischer Optionen.

Frage: Gibt es im Martingal-Fall eine Stoppzeit (Verkaufsstrategie) T mit $E(A_T) > A_0$?

Die folgenden Sätze 2, 3 und 5 sind Varianten des *optional sampling theorems*. Beweise der Sätze 2 und 3 findet man im Skript „Probability Theory“.

Satz 2.

$$(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0} \text{ Martingal} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, T \text{ beschränkte Stoppzeit} : E(X_T) = E(X_0).$$

Satz 3. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ Martingal und T Stoppzeit mit

$$P(\{T < \infty\}) = 1 \ \wedge \ E(|X_T|) < \infty \ \wedge \ \lim_{t\to\infty} \int_{\{T>t\}} |X_t| \, dP = 0.$$

Dann

$$E(X_T) = E(X_0).$$

Die Struktur der Submartingale ergibt sich wie folgt.

Satz 4 (Doobsche Zerlegung)**.** Für

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} \big(X_s - E(X_s \,|\, \mathfrak{F}_{s-1})\big) + X_0, \qquad A_t = \sum_{s=1}^{t} \big(E(X_s \,|\, \mathfrak{F}_{s-1}) - X_{s-1}\big)$$

gilt

(i) $X_t = M_t + A_t$,

(ii) $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist Martingal,

(iii) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ Submartingal $\quad\Leftrightarrow\quad$ $(A_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ P-f.s monoton wachsend.

Beweis. Nachrechnen. □

Satz 5. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ Submartingal. Für beschränkte Stoppzeiten $S \le T$ gilt[17]

$$X_S \le E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S)$$

und somit

$$E(X_S) \le E(X_T).$$

Im Martingal-Fall gilt jeweils „=“.

Beweis. Zunächst der Submartingalfall. Für Zufallsvariablen X, Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $E(|X|)$, $E(|Y|) < \infty$ gilt

$$X \le Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\ A \in \mathfrak{A} : \quad \int_A X\,dP \le \int_A Y\,dP.$$

Ferner: X_S und $E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S)$ sind $\mathfrak{F}_S$-meßbar. Also ist zu zeigen

$$\forall\ A \in \mathfrak{F}_S : \quad \int_A X_S\,dP \le \underbrace{\int_A E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S)\,dP}_{=\int_A X_T\,dP}.$$

Verwende die Doobsche Zerlegung $X = M + A$. Wg. der Monotonie von A

$$A_S \le A_T.$$

Sei $A \in \mathfrak{F}_S$. Wir zeigen

$$\int_A M_S\,dP = \int_A M_T\,dP.$$

Setze

$$R = S \cdot 1_A + T \cdot 1_{\Omega\setminus A}.$$

Da $\Omega \setminus A \in \mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_T$, folgt

$$\{R \le t\} = \underbrace{\{S \le t\} \cap A}_{\in\mathfrak{F}_t} \cup \underbrace{\{T \le t\} \cap (\Omega \setminus A)}_{\in\mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t,$$

so daß R eine beschränkte Stoppzeit ist. Satz 2 liefert

$$E(M_R) = E(M_0) = E(M_T).$$

Klar

$$E(M_R) = E(M_S \cdot 1_A) + E(M_T \cdot 1_{\Omega\setminus A}).$$

Im Martingalfall betrachte man X und $-X$. □

[17] Beachte, daß X_S $\mathfrak{F}_S$-meßbar ist. Vgl. Proposition 6 im kontinuierlichen Fall.

Gegeben: $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit $I = \{t_0, \dots, t_n\}$ für $t_0 < \cdots < t_n$ sowie $a < b$. Definiere Stoppzeiten

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{t \in I : X_t \le a\}, \\ T_2 &= \inf\{t \in I : X_t \ge b,\ t > T_1\}, \\ &\vdots \\ T_{2k+1} &= \inf\{t \in I : X_t \le a,\ t > T_{2k}\}, \\ T_{2k+2} &= \inf\{t \in I : X_t \ge b,\ t > T_{2k+1}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

sowie die Anzahl der *Überquerungen (Upcrossings)* des Intervalls $[a, b]$ von unten nach oben

$$U_I^X(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{falls } T_2 = \infty, \\ \max\{k \in \mathbb{N} : T_{2k} \le t_n\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 6 (Upcrossing-Inequality)**.** Für jedes Submartingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ gilt

$$E(U_I^X(a,b)) \le \frac{E((X_{t_n} - a)^+) - E((X_{t_0} - a)^+)}{b-a}.$$

Beweis. O.B.d.A. $a = 0$ und $X \ge 0$ aufgrund der Jensenschen Ungleichung. Definiere Stoppzeiten $S_0 = t_0$ und $S_i = T_i \wedge t_n$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann

$$X_{t_n} - X_{t_0} = \sum_{j=1}^{\infty}(X_{S_{2j}} - X_{S_{2j-1}}) + \sum_{j=0}^{\infty}(X_{S_{2j+1}} - X_{S_{2j}})$$

sowie

$$\sum_{j=1}^{\infty}(X_{S_{2j}} - X_{S_{2j-1}}) \ge b \cdot U_I^X(0,b).$$

Satz 5 sichert

$$E(X_{S_{2j+1}}) \ge E(X_{S_{2j}}).$$

Fazit

$$E(X_{t_n}) - E(X_{t_0}) \ge b \cdot E(U_I^X(0,b)).$$

□

Satz 7 (Submartingal-Ungleichungen)**.** Für jedes Submartingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und $\mu > 0$ gilt

$$\begin{aligned} P(\{\max_{i=0,\dots,n} X_{t_i} \ge \mu\}) &\le 1/\mu \cdot E(X_{t_n}^+), \\ P(\{\min_{i=0,\dots,n} X_{t_i} \le -\mu\}) &\le 1/\mu \cdot \left(E(X_{t_n}^+) - E(X_{t_0})\right). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe Chung (1974, Theorem 9.4.1). □

Schließlich noch zwei Martingalkonvergenzsätze mit $I = -\mathbb{N}$ bzw. $I = \mathbb{Z}$.

Proposition 8. Gegeben: Submartingal[18] $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in -\mathbb{N}}$ mit

$$\inf_{t\in -\mathbb{N}} E(X_t) > -\infty. \tag{1}$$

Dann existiert $X_{-\infty} \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so daß

$$\lim_{t\to -\infty} X_t = X_{-\infty} \qquad P\text{-f.s. und in } L_1.$$

Beweis. Ohne Verwendung von (1) sichert Satz 6 die Existenz einer Zufallsvariablen $X_{-\infty}$ mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so daß $\lim_{t\to -\infty} X_t = X_{-\infty}$ P-f.s., vgl. Übung 3.3. Mit (1) und Satz 7 zeigt man, daß $X_{-\infty}$ P-f.s. endlich ist, und die gleichgradige Integrierbarkeit von $(X_t)_{t\in -\mathbb{N}}$, siehe Chung (1974, Theorem 9.4.7). □

Proposition 9. Gegeben: Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $E(|Y|) < \infty$. In $L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und P-f.s. gilt

$$\lim_{t\to\infty} E(Y \mid \mathfrak{F}_t) = E\Big(Y \mid \sigma\Big(\bigcup_{t\in\mathbb{Z}} \mathfrak{F}_t\Big)\Big), \qquad \lim_{t\to -\infty} E(Y \mid \mathfrak{F}_t) = E\Big(Y \mid \bigcap_{t\in\mathbb{Z}} \mathfrak{F}_t\Big).$$

Beweis. Siehe Chung (1974, Thm. 9.4.8). □

3.2 Martingale in stetiger Zeit

Im folgenden sei $I = [0, \infty[$.

Satz 8 (Optional Sampling Thm.)**.** Für jedes rechtsseitig stetige Martingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ gilt

$$\forall\, T \text{ beschränkte Stoppzeit}: \quad E(X_T) = E(X_0).$$

Beweis. Gelte $T(\omega) \le N$ für alle $\omega \in \Omega$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei T_n definiert durch

$$T_n(\omega) = k/2^n \quad \Leftrightarrow \quad T(\omega) \in [(k-1)/2^n, k/2^n[\,.$$

Für $t \in [(k-1)/2^n, k/2^n[$ zeigt Proposition 3

$$\{T_n \le t\} = \{T_n \le (k-1)/2^n\} = \{T < (k-1)/2^n\} \in \mathfrak{F}_{(k-1)/2^n} \subset \mathfrak{F}_t,$$

d.h. T_n ist Stoppzeit.
Für alle $\omega \in \Omega$:

$$T_n(\omega) \le N+1 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} T_n(\omega) \searrow T(\omega).$$

Somit wegen der rechtsseitigen Stetigkeit:

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n}(\omega) = X_T(\omega). \tag{2}$$

Satz 5 zeigt

$$E(X_{N+1} \mid \mathfrak{F}_{T_n}) = X_{T_n}.$$

[18]Sogenanntes inverses Submartingal.

Also ist $\{X_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar, siehe Übung 3.1. Mit (2) folgt

$$\lim_{n\to\infty} E(X_{T_n}) = E(X_T).$$

Schließlich zeigt Satz 2

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : E(X_{T_n}) = E(X_0).$$

□

Die folgenden Begriffe und Ergebnisse sind grundlegend bei der Einführung des stochastischen Integrals.

Definition 12. $\mathfrak{F}$ erfüllt die *üblichen Voraussetzungen*, falls

(i) $\mathfrak{F}$ rechtsseitig stetig,

(ii) $\{A \subset \Omega : \exists\, B \in \mathfrak{A} : A \subset B \wedge P(B) = 0\} \subset \mathfrak{F}_0$.

Satz 9. Erfüllt seien

(i) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Submartingal,

(ii) $t \mapsto E(X_t)$ rechtsseitig stetig,

(iii) die üblichen Voraussetzungen.

Dann existiert eine cadlag Modifikation Y von X, so daß $(Y_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein Submartingal ist.

Beweis. Satz 7 sichert die Existenz von $B \in \mathfrak{A}$ mit $P(B) = 1$ und

$$\forall\, \omega \in B\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |X_t(\omega)| < \infty.$$

Details bei Yeh (1995, Prop. 9.1.1). Definiere

$$U_n^X(a,b) = \sup\{U_J^X(a,b) : J \subset [0,n] \cap \mathbb{Q} \text{ endlich}\}$$

sowie

$$C_n(a,b) = \{U_n^X(a,b) < \infty\}, \qquad C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{a<b,\, a,b\in\mathbb{Q}} C_n(a,b).$$

Nach Satz 6 und dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt $P(C) = 1$. Für $\omega \in B \cap C$ existieren die Grenzwerte

$$X_t^{\mathrm{r}}(\omega) = \lim_{s\searrow t,\, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$$

für jedes $t \geq 0$. Setze $Y_t(\omega) = X^{\mathrm{r}}(t)(\omega)$ für $\omega \in B\cap C$ und andernfalls $Y_t(\omega) = 0$. Man verifiziert, daß Y ein cadlag Prozeß ist. Die üblichen Voraussetzungen sichern, daß Y zu $\mathfrak{F}$ adaptiert ist.

Sei $s \in I$. Wähle $s_n \in \mathbb{Q}$ mit $s_n \searrow s$. Für $A \in \mathfrak{F}_s$

$$\int_A X_s \, dP \le \int_A E(X_{s_n} \,|\, \mathfrak{F}_s) \, dP = \int_A X_{s_n} \, dP.$$

Die L_1-Konvergenz gem. Proposition 8 liefert $E(|Y_s|) < \infty$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_{s_n} \, dP = \int_A Y_s \, dP, \tag{3}$$

so daß

$$X_s \le Y_s. \tag{4}$$

Gelte $s_n < t$. Gem. (4) folgt

$$E(Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{s_n}) \ge E(X_t \,|\, \mathfrak{F}_{s_n}) \ge X_{s_n}.$$

Zusammen mit Proposition 9 und der rechtsseitigen Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ ergibt sich

$$E(Y_t \,|\, \mathfrak{F}_s) = \lim_{n\to\infty} E(Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{s_n}) \ge \lim_{n\to\infty} X_{s_n} = Y_s,$$

d.h. $(Y_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ist ein Submartingal.
Die rechtsseitige Stetigkeit von $s \mapsto E(X_s)$ und (3) liefern

$$E(X_s) = E(Y_s),$$

Mit (4) ergibt sich $Y_s = X_s$. □

Definition 13. $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ *wachsend*, falls

(i) $A_0 = 0$,

(ii) A besitzt rechtsseitig stetige, monoton wachsende[19] Pfade,

(iii) $\forall\, t \in I : E(A_t) < \infty$.

Bemerkung 7. Wir integrieren erstmals bezüglich eines stochastischen Prozesses. Sei $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ wachsend und $(X_t)_{t\in I}$ meßbar. Dann sind die Lebesgue-Stieltjes Integrale[20]

$$I_t^{\pm}(\omega) = \int_0^t X_s^{\pm}(\omega) \, dA_s(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

für $t \in I$ wohldefiniert. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ progressiv meßbar und gelte

$$\forall\, \omega \in \Omega : I_t^{\pm}(\omega) < \infty.$$

Dann ist

$$I_t(\omega) = I_t^{+}(\omega) - I_t^{-}(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

für $t \in I$ wohldefiniert, rechtsseitig stetig und progressiv meßbar.

[19] $A_s(\omega) \le A_t(\omega)$, falls $s \le t$.

[20] Identifiziere $A_\cdot(\omega)$ mit dem durch $\mu^\omega([0, s]) = A_s(\omega)$ definierten σ-endlichen Maß auf $\mathfrak{B}(I)$.

Beispiel 8. Der Poisson-Prozeß $(N_t, \mathfrak{F}_t^N)_{t\in I}$ ist wachsend. Setze

$$J_t(\omega) = \{S_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\} \cap [0,t].$$

Dann gilt $\# J_t(\omega) = N_t(\omega) < \infty$ und

$$I_t(\omega) = \sum_{s \in J_t(\omega)} X_s(\omega).$$

Wir formulieren nun ein kontinuierliches Analogon der Doobschen Zerlegung.
Die Summe eines Martingals M und eines wachsenden Prozesses A (bzgl. derselben Filtration) ist ein Submartingal. Ist jedes Submartingal so darstellbar? Ist diese Darstellung eindeutig?

Beispiel 9. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Poisson-Prozeß mit Intensität $\lambda > 0$. Dann

$$X_t = \underbrace{X_t - \lambda t}_{=M_t} + \underbrace{\lambda t}_{=A_t}.$$

Wir wissen: $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ist ein Martingal. Klar: $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ist wachsend.

Satz 10 (Doob-Meyer-Zerlegung)**.** Erfüllt seien[21]

(i) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ stetiges Submartingal,

(ii) $\forall\, t \in I: \quad X_t \geq 0$,

(iii) die üblichen Voraussetzungen.

Dann existiert ein stetiges Martingal $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und ein stetiger wachsender Prozeß $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit

$$\forall\, t \in I\ \forall\, \omega \in \Omega: \quad X_t(\omega) = M_t(\omega) + A_t(\omega).$$

Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit.

Beweisskizze. Details bei Karatzas Shreve (1999, Chap. 1.4). Wir diskutieren die Existenz für $t \in [0,a]$ mit $a > 0$. Betrachte eine rechtsseitig stetige Modifikation $(Y_t)_{t\in[0,a]}$ des Submartingals

$$X_t - E(X_a \,|\, \mathfrak{F}_t), \qquad t \in [0,a],$$

gem. Satz[22] 9. Für $n \in \mathbb{N}$ und $I^{(n)} = \{j/2^n \cdot a : j = 0, \dots, 2^n\}$ hat man die Doobsche Zerlegung

$$Y_t = M_t^{(n)} + A_t^{(n)}, \qquad t \in I^{(n)}.$$

Ein Kompaktheitsschluß, für den (ii) verwendet wird, zeigt: es ex. eine Teilfolge $(A_a^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(A_a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $Z \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so daß

$$\forall\, \xi \in L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, P): \quad \lim_{k\to\infty} E(\xi \cdot A_a^{(n_k)}) = E(\xi \cdot Z).$$

[21] Allgemeinere Fassung bei Karatzas, Shreve (1999).
[22] Anwendbar wg. (i) und Proposition 8.

Betrachte rechtsseitig stetige Modifikationen $(M_t)_{t\in[0,a]}$ des Martingals

$$E(X_a - Z \mid \mathfrak{F}_t), \qquad t \in [0,a],$$

sowie $(A_t)_{t\in[0,a]}$ des Submartingals

$$Y_t + E(Z \mid \mathfrak{F}_t), \qquad t \in [0,a],$$

gem. Satz 9. Klar: $X_t = M_t + A_t$ und M ist ein Martingal. Zu zeigen bleibt die linksseitige Stetigkeit von A und M sowie die Monotonie von A; hier geht die Stetigkeit von X ein. □

Im folgenden: $\mathfrak{F}$ erfülle die üblichen Voraussetzungen. Kurz: Martingal statt Martingal bzgl. $\mathfrak{F}$. Gleichheit von Prozessen im Sinne der Ununterscheidbarkeit.

Definition 14. X *quadratisch integrierbar*, falls

$$\forall\, t \in I : E(X_t^2) < \infty.$$

Bez.: $\mathfrak{M}_2^c = \mathfrak{M}_2^c(\mathfrak{F})$ sei der Vektorraum aller stetigen, quadratisch integrierbaren Martingale mit $X_0 = 0$.

Bemerkung 8. Klar: für $X \in \mathfrak{M}_2^c$ ist $X^2 = (X_t^2)_{t\in I}$ stetiges Submartingal.

Definition 15. *Quadratische Variation* von $X \in \mathfrak{M}_2^c$ ist der[23] stetige, wachsende Prozeß $(A_t)_{t\in I}$ in der Doob-Meyer-Zerlegung

$$X_t^2 = M_t + A_t$$

von X^2. Bez.: $\langle X \rangle_t = A_t$.

Vgl. Übung 2.3.b für den kompensierten Poisson-Prozeß.

Definition 16. Für $X, Y \in \mathfrak{M}_2^c$ heißt[24]

$$\langle X, Y \rangle_t = \tfrac{1}{4}(\langle X+Y \rangle_t - \langle X-Y \rangle_t), \quad t \in I,$$

der *Kreuz-Variationsprozeß*. X und Y heißen *orthogonal*, falls

$$\langle X, Y \rangle = 0.$$

Proposition 10. Für $X, Y \in \mathfrak{M}_2^c$ gilt

(i) $\langle X, X \rangle = \langle X \rangle$,

(ii) äquivalent sind

  (a) $XY - Z$ ist Martingal $\wedge$ $Z = A' - A''$ mit A', A'' stetig, wachsend,

  (b) $Z = \langle X, Y \rangle$,

[23]Eindeutig bestimmt bis auf Ununterscheidbarkeit.
[24]Polarisation.

(iii) äquivalent sind

  (a) X, Y orthogonal,
  (b) XY Martingal,
  (c) $E((X_t - X_s) \cdot (Y_t - Y_s) \,|\, \mathfrak{F}_s) = 0$ für alle $0 \leq s < t$, [25]

(iv) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch und bilinear,

(v) $\langle X, Y \rangle^2 \leq \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle$.

Beweis. ad (i):

$$\langle X, X \rangle_t = \tfrac{1}{4} \langle 2X \rangle_t = \langle X \rangle_t.$$

ad (ii): „(b) $\Rightarrow$ (a)“: $(X+Y)^2 - \langle X+Y \rangle$ und $(X-Y)^2 - \langle X-Y \rangle$ sind Martingale, somit auch ihre Differenz

$$(X+Y)^2 - (X-Y)^2 - \langle X+Y \rangle + \langle X-Y \rangle = 4XY - 4\langle X, Y \rangle.$$

„(a) $\Rightarrow$ (b)“: siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 31).
ad (iii): „(a) $\Leftrightarrow$ (b)“ folgt aus (ii).
„(b) $\Leftrightarrow$ (c)“.

$$\begin{aligned} E((X_t - X_s) \cdot (Y_t - Y_s) \,|\, \mathfrak{F}_s) &= E(X_t Y_t + X_s Y_s - X_t Y_s - X_s Y_t \,|\, \mathfrak{F}_s) \\ &= E(X_t Y_t \,|\, \mathfrak{F}_s) - X_s Y_s. \end{aligned}$$

ad (iv): Symmetrie klar. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind

$$(\alpha X) \cdot Y - \langle \alpha X, Y \rangle \quad \text{und} \quad \alpha \cdot (XY) - \alpha \cdot \langle X, Y \rangle$$

gem. (ii) Martingale. Mit (ii) folgt ebenfalls $\alpha \langle X, Y \rangle = \langle \alpha X, Y \rangle$. Beweis der Additivität analog.
ad (v): Folgt wie üblich aus (iv) und $\langle X \rangle_t \geq 0$. □

Definition 17. Sei $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$ mit $0 = t_0 < \cdots < t_m = t$ Zerlegung von $[0, t]$. Ferner sei $p \in \,]0, \infty[$. Dann heißt

$$V_t^{(p)}(X; \pi) = \sum_{k=1}^{m} \left| X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \right|^p$$

p-te Variation von X auf $[0, t]$ bzgl. π. Ferner heißt

$$\|\pi\| = \max_{k=1,\ldots,m} (t_k - t_{k-1})$$

die *Feinheit* von π. Die durch

$$m_t(X; \delta)(\omega) = \sup\{|X_r(\omega) - X_s(\omega)| : r, s \in [0, t],\ |r - s| \leq \delta\}$$

definierte Abbildung $m_t(X; \cdot)(\cdot) : [0, t] \times \Omega \to [0, \infty]$ heißt *Stetigkeitsmodul* von X auf $[0, t]$.

[25] Inkremente sind bedingt „unkorreliert“.

Bemerkung 9. Sei X stetig. Dann ist $m_t(X;\cdot)(\cdot)$ endlich und $m_t(X;\delta)$ ist $\mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{B}(I)$-meßbar. Ferner

$$\forall\ \omega \in \Omega : \lim_{\delta \to 0} m_t(X;\delta)(\omega) = 0.$$

Satz 11. Gelte $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$ für Folge von Zerlegungen π_n von $[0,t]$ und sei $X \in \mathfrak{M}_2^c$. Dann

$$V_t^{(2)}(X;\pi_n) \overset{P\text{-stoch.}}{\to} \langle X\rangle_t.$$

Beweis.
1. Fall: X und $\langle X\rangle$ beschränkt auf $[0,t]$. Genauer

$$P\left(\bigcap_{s\in[0,t]} \{\max\{|X_s|, \langle X\rangle_s\} \le K\}\right) = 1.$$

Wir zeigen hier sogar L_2-Konvergenz. Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned}
E\left(V_t^{(2)}(X;\pi) - \langle X\rangle_t\right)^2 &= E\left(\sum_{k=1}^m \underbrace{(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 - (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})}_{=Y_k}\right)^2 \\
&= \sum_{k,\ell=1}^m E(Y_k \cdot Y_\ell).
\end{aligned}$$

Wir zeigen

$$\forall\ k \neq \ell : E(Y_k \cdot Y_\ell) = 0. \tag{5}$$

Für $0 \le s < t \le u < v$ gilt[26]

$$\begin{aligned}
E((X_v - X_u)^2 \,|\, \mathfrak{F}_t) &= E(X_v^2 - X_u^2 \,|\, \mathfrak{F}_t) \\
&= E(X_v^2 - \langle X\rangle_v - (X_u^2 - \langle X\rangle_u) \,|\, \mathfrak{F}_t) + E(\langle X\rangle_v - \langle X\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_t) \\
&= E(\langle X\rangle_v - \langle X\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_t).
\end{aligned}$$

Somit für $k < \ell$ (und analog für $\ell < k$)

$$E(Y_k \cdot Y_\ell \,|\, \mathfrak{F}_{t_k}) = Y_k \cdot E(Y_\ell \,|\, \mathfrak{F}_{t_k}) = 0,$$

so daß (5) folgt.
Also

$$\begin{aligned}
&E\left(V_t^{(2)}(X;\pi) - \langle X\rangle_t\right)^2 \\
&\quad = \sum_{k=1}^m E\left((X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 - (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})\right)^2 \\
&\quad \le 2\sum_{k=1}^m E\left((X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^4 + (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})^2\right) \\
&\quad \le 2 \cdot E\left(V_t^{(4)}(X;\pi)\right) + 2 \cdot E\left(m_t(\langle X\rangle; \|\pi\|) \cdot \langle X\rangle_t\right).
\end{aligned}$$

[26] $E(X_uX_v \,|\, \mathfrak{F}_t) = E(E(X_uX_v \,|\, \mathfrak{F}_u) \,|\, \mathfrak{F}_t) = E(X_u E(X_v \,|\, \mathfrak{F}_u) \,|\, \mathfrak{F}_t) = E(X_u^2 \,|\, \mathfrak{F}_t)$.

Es gilt
$$E\left(V_t^{(2)}(X;\pi)\right)^2 \le 6\cdot K^4,$$
siehe Karatzas, Shreve (1999, Lemma 1.5.9). Ferner
$$V_t^{(4)}(X;\pi) \le m_t(X;\|\pi\|)^2 \cdot V_t^{(2)}(X;\pi)$$
und hiermit
$$\begin{aligned} E(V_t^{(4)}(X;\pi)) &\le \left(E\left(V_t^{(2)}(X;\pi)\right)^2\right)^{1/2} \cdot \left(E\left(m_t(X;\|\pi\|)^4\right)\right)^{1/2} \\ &\le 3K^2 \cdot \left(E\left(m_t(X;\|\pi\|)^4\right)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$
Klar
$$m_t(X;\delta) \le 2K, \qquad m_t(\langle X\rangle;\delta) \le K.$$
Der Lebesguesche Grenzwertsatz und die Stetigkeit der Pfade sichern
$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_t^{(2)}(X;\pi_n) - \langle X\rangle_t\right)^2 = 0.$$
2. Fall: keine Beschränktheitsvoraussetzungen. Rückführung auf 1. Fall (*Lokalisation*). Definiere
$$T_K = \inf\{t\in I : |X_t| \ge K \;\vee\; \langle X\rangle_t \ge K\}, \qquad K\in\mathbb{N}.$$
Proposition 5 zeigt, daß T_K Stoppzeit ist. Die gestoppten Prozesse
$$X_t^{(K)} = X_{T_K\wedge t}, \qquad t\in I,$$
und
$$X^2_{T_K\wedge t} - \langle X\rangle_{T_K\wedge t}, \qquad t\in I,$$
sind beschränkte Martingale, siehe **Übung** 3.2. Die Eindeutigkeit der Doob-Meyer-Zerlegung liefert
$$\langle X\rangle_{T_K\wedge t} = \langle X^{(K)}\rangle_t.$$
Gemäß Fall 1.) gilt für festes $K\in\mathbb{N}$
$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_t^{(2)}(X^{(K)};\pi_n) - \langle X^{(K)}\rangle_t\right)^2 = 0.$$
Setze
$$B_n^\varepsilon = \{|V_t^{(2)}(X;\pi_n) - \langle X\rangle_t| \ge \varepsilon\}, \qquad A_K = \{T_K \le t\}.$$
Es gilt $\lim_{K\to\infty} T_K(\omega) = \infty$ für alle $\omega\in\Omega$ wegen der Stetigkeit der Pfade von X und $\langle X\rangle$, also
$$\lim_{K\to\infty} P(A_K) = 0.$$
Weiter
$$\begin{aligned} P(B_n^\varepsilon) &= P(B_n^\varepsilon \cap A_K) + P(B_n^\varepsilon \setminus A_K) \\ &\le P(A_K) + P(\{|V_t^{(2)}(X^{(K)};\pi_n) - \langle X^{(K)}\rangle_t| \ge \varepsilon\}), \end{aligned}$$
und somit
$$\limsup_{n\to\infty} P(B_n^\varepsilon) \le P(A_K).$$
□

Abschließend: Die Wahl von $p = 2$ bei der Variation ist angemessen für stetige, quadratisch integrierbare Martingale.

Satz 12. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Prozeß mit stetigen Pfaden, $p > 0$ und L_t Zufallsvariable, so daß

$$V_t^{(p)}(X; \pi_n) \overset{P\text{-stoch.}}{\to} L_t$$

falls $\|\pi_n\| \to 0$. Dann gilt für $q > p$

$$V_t^{(q)}(X; \pi_n) \overset{P\text{-stoch.}}{\to} 0$$

und[27] für $0 < q < p$

$$V_t^{(q)}(X; \pi_n) \cdot 1_{\{L_t>0\}} \overset{P\text{-stoch.}}{\to} \infty \cdot 1_{\{L_t>0\}},$$

falls $\|\pi_n\| \to 0$.

Beweis. Übung 4.2. □

Eine wichtige Konsequenz der Sätze 11 und 12: die Definition von stochastischen Integralen bzgl. stetiger quadratisch-integrierbarer Martingale X, etwa mit $\langle X\rangle_t > 0$ für alle $t > 0$, kann nicht pfadweise unter Rückgriff auf die deterministische Lebesgue-Stieltjes-Theorie erfolgen.

4 Der Kolmogorovsche Konsistenzsatz

Gegeben: Meßraum $(S, \mathfrak{S})$ und beliebige Menge $I \neq \emptyset$, sowie zunächst ein stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zustandsraum $(S, \mathfrak{S})$.
Für $\emptyset \neq J \subset I$ sei $X_J : \Omega \to S^J$ durch

$$(X_J(\omega))(t) = X_t(\omega)$$

für $\omega \in \Omega$ und $t \in J$ definiert.

Bemerkung 10. X_J ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^J$-meßbar.

Definition 18. In obiger Situation heißt das Bildmaß[28] $X_I P$ auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$ die *Verteilung* von X (auf dem Raum $(S^I, \mathfrak{S}^I)$).

Bemerkung 11. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$. Betrachte den durch

$$X_t(\omega) = \omega(t)$$

für $\omega \in S^I$ und $t \in I$ definierten *kanonischen Prozeß*. Klar: $X_I\mu = \mu$, da $X_I = \mathrm{Id}$.

Also: Konstruktion von stochastischen Prozessen durch Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$.

[27] $\infty \cdot 0 = 0$.
[28] Also $(X_I P)(A) = P(\{\omega \in \Omega : X_\cdot(\omega) \in A\})$ für $A \in \mathfrak{S}^I$.

Beispiel 10.

(i) Produktmaße: hier I und $(S, \mathfrak{S})$ beliebig, aber man erhält nur Prozesse mit unabhängigen Zufallselementen.

(ii) Markov–Kerne: Satz von Ionesu–Tulcea für $I = \mathbb{N}$ und $(S, \mathfrak{S})$ beliebig.

Nun: I beliebig, S geeigneter topologischer Raum und $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(S)$.
Setze $\mathfrak{P}_0(I) = \{J \subset I : J \neq \emptyset \text{ endlich}\}$, betrachte die Projektionen

$$\pi^{J_1}_{J_2} : S^{J_1} \to S^{J_2} \qquad (z_j)_{j \in J_1} \mapsto (z_j)_{j \in J_2}$$

für $\emptyset \neq J_2 \subset J_1 \subset I$. Kurz: $\pi_J = \pi^I_J$.

Definition 19. $(X_J P)_{J \in \mathfrak{P}_0(I)}$ heißt[29] *die Familie der endlich-dimensionalen Randverteilungen* von X.

Bemerkung 12.

(i) Für $J = \{t_1, \dots, t_n\}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{S}$

$$X_J P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P(\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A_1 \times \cdots \times A_n\}).$$

(ii) Sei $X' = (X'_t)_{t \in I}$ ein Prozeß auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ mit Zustandsraum $(S, \mathfrak{S})$. Dann

$$X_I P = X'_I P' \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, J \in \mathfrak{P}_0(I) : \quad X_J P = X'_J P'.$$

Frage: Existenz eines Prozesses mit vorgegebenen endlich-dimensionalen Randverteilungen?

Definition 20. Familie $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}_0(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_J auf $(S^J, \mathfrak{S}^J)$ heißt *projektiv*, falls

$$\forall\, J_1, J_2 \in \mathfrak{P}_0(I) : \quad J_2 \subset J_1 \Rightarrow \mu_{J_2} = \pi^{J_1}_{J_2} \mu_{J_1}.$$

Klar: X stochastischer Prozeß $\Rightarrow (X_J P)_{J \in \mathfrak{P}_0}$ projektiv.

Definition 21. Topologischer Raum $(M, \mathfrak{O})$ heißt *polnisch*, falls eine Metrik ρ auf M existiert, so daß

(i) ρ die Topologie $\mathfrak{O}$ erzeugt,

(ii) (M, ρ) vollständig und separabel.

Beispiel 11. $M = \mathbb{R}^d$, jeder separable Banachraum, $M = C([0, \infty[)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta, siehe Proposition II.3.

[29] Im Fall $S = \mathbb{R}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ identifiziert man $X_J P$ oft mit einer Verteilung auf $\mathbb{R}^{|J|}$.

Satz 13 (Äußere Regularität von Borel-Maßen)**.** Sei (M, ρ) ein metrischer Raum und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{B}(M))$. Dann gilt

$$\nu(A) = \inf\{\nu(O) : O \supset A,\ O \text{ offen}\} = \sup\{\nu(C) : C \subset A,\ A \text{ abgeschlossen}\}.$$

Beweis. Übung 4.4. □

Satz 14 (Innere Regularität von Borel-Maßen)**.** Sei $(M, \mathfrak{O})$ ein polnischer Raum und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{B}(M))$. Dann gilt

$$\nu(A) = \sup\{\nu(C) : C \subset A,\ C \text{ kompakt}\}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für $A = M$, also

$$1 = \sup\{\nu(C) : C \subset M,\ C \text{ kompakt}\}. \tag{6}$$

OBdA: (M, ρ) vollständiger separabler metrischer Raum. Wähle $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dicht in M. Setze

$$B_{n,i} = \{m \in M : \rho(m, m_i) < 1/n\}$$

für $i, n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $i_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\nu\big(M \setminus \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}\big) \leq \varepsilon \cdot 2^{-n}.$$

Setze

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}.$$

Dann

$$\nu(M \setminus \overline{B}) \leq \nu(M \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(M \setminus \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}) \leq \varepsilon.$$

Um (6) zu folgern, bleibt zu zeigen, daß $\overline{B}$ kompakt ist. Dazu zeigen wir, daß jede Folge $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in B eine Cauchy-Teilfolge enthält und verwenden dann die Vollständigkeit von (M, ρ).

Nach Definition von B existiert $i_1^* \in \{1, \ldots, i_1\}$, so daß $|\{j \in \mathbb{N} : z_j \in B_{1,i_1^*}\}| = \infty$, d.h. es existiert eine Teilfolge, die stets in B_{1,i_1^*} liegt. Durch Iteration und Diagonalisierung bekommt man so eine Folge von Indizes

$$i_n^* \in \{1, \ldots, i_n\}$$

und eine Teilfolge $(z_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$, welche für alle $n \geq k$

$$z_{j_n} \in B_{k,i_k^*}$$

erfüllt. Also ist $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Nun sei $A \in \mathfrak{B}(M)$ beliebig. Nach Satz 13 existiert für $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $C \subset A$ mit $\nu(A \setminus C) \leq \varepsilon$. Wegen (6) existiert eine kompakte Menge $K \subset M$ mit $\nu(M \setminus K) \leq \varepsilon$. Fazit: $D = C \cap K \subset A$ ist kompakt und erfüllt

$$\nu(A \setminus D) \leq 2\varepsilon.$$

□

Satz 15 (Konsistenzsatz von Daniell 1918, Kolmogorov 1933)**.** Sei $(S, \mathfrak{O})$ ein polnischer Raum, $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(S)$, und $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}_0(I)}$ eine projektive Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_J auf $(S^J, \mathfrak{S}^J)$. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$, so daß

$$\forall\, J \in \mathfrak{P}_0(I): \quad \pi_J \mu = \mu_J.$$

Für den Beweis benötigen wir zwei Lemmata.

Lemma 3. Ist $(S, \mathfrak{O})$ ein polnischer Raum und $J \neq \emptyset$ eine endliche Menge, so ist $(S^J, \mathfrak{O}^J)$ ein polnischer Raum und $\mathfrak{B}(S^J) = (\mathfrak{B}(S))^J$.

Beweis. Siehe Gänssler, Stute (1977, Satz 1.3.12). Es gilt stets $\mathfrak{B}(S^J) \supset (\mathfrak{B}(S))^J$ und bei polnischen Räumen auch $\mathfrak{B}(S^J) \subset (\mathfrak{B}(S))^J$. □

Lemma 4. Sei (S, ρ) ein metrischer Raum, $I \neq \emptyset$, $J_n \in \mathfrak{P}_0(I)$ sowie $K_n \subset S^{J_n}$ kompakt. Setze

$$Y_n = \bigcap_{\ell=1}^{n} (\pi_{J_\ell})^{-1}(K_\ell).$$

Falls $Y_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist[30] $\bigcap_{n=1}^\infty Y_n \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in S^I mit $y_n \in Y_n$. Für $m \geq n$ ist $y_m \in Y_n$, also folgt für $t \in J_n$

$$y_m(t) = \pi^{J_n}_{\{t\}} \circ \pi_{J_n}(y_m) \in \pi^{J_n}_{\{t\}}(K_n),$$

und $\pi^{J_n}_{\{t\}}(K_n)$ ist kompakt. Setze $J = \bigcup_{n=1}^\infty J_n$. Es existiert eine Teilfolge $(y_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$, so daß für jedes $t \in J$ die Folge $(y_{n_\ell}(t))_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Fixiere $a \in S$ und definiere $z \in S^I$ durch

$$z(t) = \lim_{\ell\to\infty} y_{n_\ell}(t),$$

falls $t \in J$, und andernfalls durch $z(t) = a$. Da K_n abgeschlossen, folgt $\pi_{J_n}(z) \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $z \in \bigcap_{n=1}^\infty Y_n$. □

Beweis von Satz 15. Eindeutigkeit: siehe Bemerkung 12. Existenz: Wir betrachten die Algebra

$$\mathfrak{S}^I_0 := \bigcup_{J \in \mathfrak{P}_0(I)} \sigma(\{\pi_J\})$$

der Zylindermengen. Für $A \in \mathfrak{S}^I_0$ von der Form $A = \pi_J^{-1}(B)$ für $B \in \mathfrak{S}^J$ und $J \in \mathfrak{P}_0(I)$ setzen wir

$$\widehat{\mu}(A) := \mu_J(B).$$

Dies ist wohldefiniert, da $(\mu_J)_{J\in\mathfrak{P}(I)}$ eine projektive Familie ist. Klar: $\widehat{\mu}$ ist Inhalt auf $\mathfrak{S}^I_0$. Nach dem Maßfortsetzungssatz genügt es nun zu zeigen, daß $\widehat{\mu}$ stetig in $\emptyset$ ist. Seien also $Z_n \in \mathfrak{S}^I_0$ mit $Z_n \downarrow \emptyset$. Annahme: $\inf_{n\in\mathbb{N}} \widehat{\mu}(Z_n) = \alpha > 0$. Es sei

$$Z_n = \pi_{J_n}^{-1}(B_n)$$

[30] Dies verallgemeinert den Cantorschen Durchschnittssatz, der den Falle $|I| = 1$ behandelt.

mit $B_n \in \mathfrak{S}^{J_n}$. OBdA können wir $J_1 \subset J_2 \subset \dots$ voraussetzen. Nach Lemma 3 und Satz 14 existieren kompakte Mengen $K_n \subset B_n$ mit $\mu_{J_n}(B_n \setminus K_n) \leq 2^{-n} \cdot \alpha$. Setze $Z'_n = \pi_{J_n}^{-1}(K_n)$, dann folgt

$$\widehat{\mu}(Z_n \setminus Z'_n) \leq 2^{-n} \cdot \alpha.$$

Damit hat man für Y_n gemäß Lemma 4

$$\widehat{\mu}(Z_n) - \widehat{\mu}(Y_n) = \widehat{\mu}\left(\bigcup_{\ell=1}^{n}(Z_n \setminus Z'_\ell)\right) \leq \sum_{\ell=1}^{n} \widehat{\mu}(Z_\ell \setminus Z'_\ell) < \alpha.$$

Da $\widehat{\mu}(Z_n) \geq \alpha$, folgt hieraus $\widehat{\mu}(Y_n) > 0$ und damit $Y_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Lemma 4 folgt nun $\bigcap_n Y_n \neq \emptyset$, ein Widerspruch. □

Definition 22. In der Situation von Satz 15 heißt μ der *projektive Limes* der Familie $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}(I)}$, Bez.: $\mu = \lim_{J \in \mathfrak{P}(J)} \mu_J$.

Anwendung: Prozesse mit unabhängigen Inkrementen. Im folgenden $I = [0, \infty[$ und $(S, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

Definition 23. $(X_t)_{t \in I}$ besitzt

(i) *unabhängige Inkremente*, falls

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$.

(ii) *stationäre Inkremente*, falls für alle $0 \leq s < t$ die Verteilungen von $X_t - X_s$ und $X_{t-s} - X_0$ übereinstimmen.

Lemma 5. Für $X = (X_t)_{t \in I}$ mit X_0 P-f.s. konstant gilt

X besitzt unabhängige Inkremente $\;\Leftrightarrow\;$ $\forall\, 0 \leq s < t : X_t - X_s$ unabhängig von $\mathfrak{F}_s^X$.

Beweis. „$\Leftarrow$“: induktiv. „$\Rightarrow$“ Fixiere s und setze

$$\mathfrak{D} = \{A \in \mathfrak{F}_s^X : 1_A, X_t - X_s \text{ unabhängig}\},$$
$$\mathfrak{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N},\ 0 = s_0 < \cdots < s_n = s} \sigma(\{X_{s_0}, \dots, X_{s_n}\}).$$

Klar: $\mathfrak{D}$ ist Dynkin-System, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}_s^X$, $\sigma(\mathfrak{C}) = \mathfrak{F}_s^X$, $\mathfrak{C}$ ist $\cap$-stabil. Wir zeigen $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$ und schließen dann

$$\mathfrak{F}_s^X = \sigma(\mathfrak{C}) = \delta(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}_s^X.$$

Nach Voraussetzung gilt für $0 = s_0 < \cdots < s_n = s < t$

$$X_0, X_{s_1} - X_{s_0}, \dots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}, X_t - X_s \text{ unabhängig.}$$

Ferner

$$\sigma(\{X_0, X_{s_1} - X_{s_0}, \dots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}\}) = \sigma(\{X_0, X_{s_1}, \dots, X_{s_n}\}).$$

□

Sei X ein Prozeß mit unabhängigen Inkrementen. Setze

$$\nu_{s,t} = P_{X_t - X_s}, \qquad 0 \leq s \leq t.$$

Beispiel 12. Poisson-Prozeß besitzt stationäre, unabhängige Inkremente. Stationarität: klar, da $X_t - X_s$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t-s)$. Unabhängigkeit: beachte $\mathfrak{F}_s^X \subset \mathfrak{F}_s$ für an $\mathfrak{F}$ adaptierte Prozesse X und wende Lemma 5 an.

Bemerkung 13.

(i) Offenbar gilt $\nu_{s,t} = \nu_{s,r} * \nu_{r,t}$ für $0 \leq s < r < t$.

(ii) Falls $X_0 = 0$, so ist die Verteilung von X durch $(\nu_{s,t})_{0 \leq s < t}$ eindeutig bestimmt.

Satz 16. Sei $(\nu_{s,t})_{0 \leq s < t}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ mit

$$\forall\, 0 \leq s < r < t: \quad \nu_{s,t} = \nu_{s,r} * \nu_{r,t}. \tag{7}$$

Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und ein darauf definierter stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$, so daß

(i) $X_0 = 0$.

(ii) X hat unabhängige Inkremente.

(iii) $\forall\, 0 \leq s < t: \quad P_{X_t - X_s} = \nu_{s,t}$.

Durch diese Forderungen ist die Verteilung des Prozesses eindeutig bestimmt.

Beweis. Wende Satz 15 und Bemerkung 13 an. □

Bemerkung 14. Spezialfall: Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen und $X_0 = 0$ Hier wird X in seiner Verteilung schon durch $\nu_t = \nu_{t,0}$ bestimmt. Die Familie $(\nu_t)_{t>0}$ heißt *Faltungshalbgruppe* ($\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$). Beispiel: Poisson-Prozeß

Kapitel II

Brownsche Bewegung

Literatur:

> Karatzas, Shreve (1999, Chap. 2).

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$, wobei $I = [0, \infty[$.

Definition 1. $W = (W_t)_{t \in I}$ *Brownsche Bewegung (Wiener-Prozeß)* bzgl. $\mathfrak{F}$, falls

(i) W reellwertig mit stetigen Pfaden,

(ii) W adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(iii) $W_0 = 0$,

(iv) für $0 \leq s < t$ ist $W_t - W_s$

  (a) unabhängig von $\mathfrak{F}_s$,
  (b) $N(0, t-s)$-verteilt[1].

Bemerkung 1. Brownsche Bewegungen sind Prozesse mit stationären, unabhängigen Inkrementen, vgl. Beispiel I.12. Ferner besitzen alle Brownschen Bewegungen dieselbe Verteilung auf $(\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I)$, siehe Bemerkung I.13.(ii).

Proposition 1. $W \in \mathfrak{M}_2^c$ und $\langle W \rangle_t = t$.

Beweis. [2] Vgl. Beweise für den kompensierten Poisson-Prozeß (mit $\lambda = 1$), siehe Bsp. I.6 und Übung 2.3.b. Zum Nachweis der Martingaleigenschaft benötigt: (iv.a) und $E(W_t - W_s) = 0$. Zur Bestimmung der quadratischen Variation benötigt: (iv.a) und $E(W_t - W_s)^2 = |t - s|$. □

Die endlich-dimensionalen Randverteilungen einer Brownschen Bewegung sind wie folgt gegeben.

[1] $N(m, K)$ ist die Normalverteilung auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ mit Mittelwert $m \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrix $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n = 1$: Varianz K). Siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. 1.19)

[2] Siehe auch Karatzas, Shreve (1999, Exercise I.5.20)

Lemma 1. Sei W Brownsche Bewegung und

$$K = (\min(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n} \tag{1}$$

mit paarweise verschiedenen $t_1, \dots, t_n \in I$. Dann:

$$W_{t_1}, \dots, W_{t_n} \text{ sind gemeinsam } N(0, K)\text{-verteilt.}$$

Beweis. Gelte $0 \le t_1 < \dots < t_n$. Setze

$$Z = (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})', \qquad Y = (W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})'$$

sowie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Bemerkung 1 und (iv.b) folgt: Y ist $N(0, D)$-verteilt mit

$$D = \begin{pmatrix} t_1 - 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wg. (iii) gilt $Z = A \cdot Y$. Somit ist Z $N(m, K)$-verteilt mit $m = A \cdot 0 = 0$ und

$$K = A \cdot D \cdot A' = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} = (\min(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

□

1 Eine Konstruktion der Brownschen Bewegung

Hier: mit Hilfe des Konsistenzsatzes von Kolmogorov.

Proposition 2. Es existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I)$, so daß für den kanonischen Prozeß $(\widetilde{W}_t)_{t \in I}$ auf $(\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I, Q)$ gilt

(i) $\widetilde{W}_0 = 0$ Q-f.s.,

(ii) $\widetilde{W}$ besitzt unabhängige Inkremente,

(iii) $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ ist $N(0, t - s)$-verteilt für $0 \le s < t$.

Beweis. Für $\nu_{s,t} = N(0, t - s)$ ist Satz I.16 anwendbar. □

Der Pfadraum von $\widetilde{W}$ ist viel zu groß. Die anderen Eigenschaften der Brownschen Bewegung (bzgl. der kanonischen Filtration) sind hingegen erreicht. Zur Verifikation von (iv).(a) verwendet man Lemma I.5.

Frage: Gilt $C(I) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I$ und $P(C(I)) = 1$? Antwort: Nein, da

$$\forall\, A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I: \quad A \subset C(I) \quad \Rightarrow \quad A = \emptyset.$$

Satz 1 (Kolmogorov-Chentsov)**.** Der Prozeß $(\widetilde{X}_t)_{t\in[0,T]}$ erfülle[3]

$$\exists\, \alpha, \beta > 0: \sup_{s,t\in[0,T]} \frac{E|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t|^\alpha}{|s-t|^{1+\beta}} < \infty.$$

Dann existiert für jedes

$$\gamma \in \,]0, \beta/\alpha[$$

eine Modifikation $(X_t)_{t\in[0,T]}$ von $\widetilde{X}$, eine positive Zufallsvariable h sowie $\delta > 0$, so daß für alle $\omega \in \Omega$ gilt[4]:

$$\sup_{0<|t-s|<h(\omega)} \frac{|X_s(\omega) - X_t(\omega)|}{|s-t|^\gamma} \le \delta. \tag{2}$$

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ gilt[5]

$$P(\{|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t| \ge \varepsilon\}) \le \varepsilon^{-\alpha} \cdot E|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t|^\alpha \preceq \varepsilon^{-\alpha} \cdot |s-t|^{1+\beta}.$$

Also: $\widetilde{X}_{s_n} \overset{P\text{-stoch}}{\rightarrow} \widetilde{X}_t$, falls $s_n \to t$.

Nun der Einfachheit halber: $T = 1$. Wähle $\gamma \in \,]0, \beta/\alpha[$. Dann

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\max_{1\le k\le 2^n} |\widetilde{X}_{k/2^n} - \widetilde{X}_{(k-1)/2^n}| \ge 2^{-\gamma n}\right\}\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{|\widetilde{X}_{k/2^n} - \widetilde{X}_{(k-1)/2^n}| \ge 2^{-\gamma n}\right\}\right) \\ &\preceq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{\gamma n\alpha} \cdot 2^{-n(1+\beta)} = 2^{-n(\beta-\gamma\alpha)}. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt die Existenz von $\Omega^* \in \mathfrak{A}$ mit $P(\Omega^*) = 1$ und $n^*: \Omega \to \mathbb{N}$ meßbar, so daß für alle $\omega \in \Omega^*$ gilt

$$\forall\, n \ge n^*(\omega): \max_{1\le k\le 2^n} |\widetilde{X}_{k/2^n}(\omega) - \widetilde{X}_{(k-1)/2^n}(\omega)| < 2^{-\gamma n}.$$

Setze

$$D_n = \{k/2^n : k = 0, \dots, 2^n\}, \qquad D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} D_n$$

sowie $h(\omega) = 2^{-n^*(\omega)}$. Man zeigt nun[6] für $\omega \in \Omega^*$ und $s, t \in D$ mit $|s-t| < h(\omega)$

$$|\widetilde{X}_s(\omega) - \widetilde{X}_t(\omega)| \le \underbrace{\frac{2}{1-2^{-\gamma}}}_{=\delta} \cdot |s-t|^\gamma.$$

[3] Verschärfung für Gauß-Prozesse, siehe Adler (1981).

[4] alle Pfade sind lokal Hölder-stetig mit Exponent γ.

[5] $\preceq$ für $O(\dots)$.

[6] Details bei Karatzas, Shreve (1999, p. 54, 55)

Also ist $\widetilde{X}_{\cdot}(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega^*$ auf D gleichmäßig stetig und somit eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $X_{\cdot}(\omega) : [0,1] \to \mathbb{R}$ fortsetzbar. Für $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$ setzen wir $X_t(\omega) = 0$.
Klar: X ist ein stochastischer Prozeß, der (2) erfüllt. Für $t \in D$ gilt

$$P(\{X_t = \widetilde{X}_t\}) \geq P(\Omega^*) = 1.$$

Für $t \in [0,1] \setminus D$ und Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $s_n \to t$ gilt

$$\widetilde{X}_{s_n} \overset{P\text{-stoch.}}{\to} \widetilde{X}_t \qquad \wedge \qquad \widetilde{X}_{s_n} \overset{P\text{-f.s.}}{\to} X_t.$$

Also: $\widetilde{X}_t = X_t$ P-f.s. $\square$

Satz 2. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I, Q)$ aus Proposition 2 existiert ein Prozeß, der bzgl. seiner kanonischen Filtration eine Brownsche Bewegung ist.

Beweis. Betrachte den o.g. Wahrscheinlichkeitsraum. Es gilt für $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned} E(|\widetilde{W}_s - \widetilde{W}_t|^\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha \exp\left(-\frac{y^2}{2(t-s)}\right) dy \\ &= (t-s)^{\alpha/2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha \exp(-\tfrac{1}{2}y^2)\, dy. \end{aligned}$$

Wähle $\alpha > 2$ und $\beta = \alpha/2 - 1$ sowie $T > 0$. Dann existiert gemäß Satz 1 eine Modifikation $(W_t^T)_{t\in[0,T]}$ von $(\widetilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ mit stetigen Pfaden. Setze

$$\Omega_T = \bigcap_{t \in \mathbb{Q}\cap[0,T]} \{\widetilde{W}_t = W_t^T\}$$

und

$$\widetilde{\Omega} = \bigcap_{T\in\mathbb{N}} \Omega_T.$$

Dann

$$Q(\widetilde{\Omega}) = 1,$$

und für $\omega \in \widetilde{\Omega}$ und ganzzahlige $0 \leq T_1 \leq T_2$ sowie $t \in [0, T_1]$ gilt

$$W_t^{T_1}(\omega) = W_t^{T_2}(\omega).$$

Somit ist

$$W_t(\omega) = \begin{cases} W_t^T(\omega), & \text{falls } \omega \in \widetilde{\Omega} \text{ und } T \in \mathbb{N} \cap [t, \infty[\\ 0, & \text{falls } \omega \notin \widetilde{\Omega} \end{cases}$$

wohldefiniert, und W ist eine Modifikation von $\widetilde{W}$.
Betrachte die kanonische Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t^W)_{t\in I}$. Klar: die Eigenschaften (i), (ii), (iii), (iv.b) der Brownschen Bewegung sind erfüllt und W besitzt unabhängige Inkremente. Wende Lemma I.5 an, um (iv.a) zu erhalten. $\square$

Für jedes $\gamma < \frac{1}{2}$ sind die Pfade einer Brownschen Bewegung f.s. lokal Hölder-stetig mit Exponent γ. Man wähle hierzu in obigem Beweis α hinreichend groß und $\beta = \alpha/2 - 1$. Es gilt $\lim_{\alpha\to\infty} \beta/\alpha = \frac{1}{2}$. Wir sehen später, daß diese Glattheitsaussage scharf – bis auf logarithmische Terme – ist.

2 Das Wiener Maß und das Donskersche Invarianzprinzip

2.1 Das Wiener-Maß

Zunächst: das kanonische Modell für die Brownsche Bewegung.

Setze

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{t \in [0,n]} \min(|f_1(t) - f_2(t)|, 1), \qquad f_i \in C(I).$$

Proposition 3. $(C(I), \rho)$ ist ein vollständiger separabler metrischer Raum[7].

Beweis. Unter Verwendung der entsprechenden Eigenschaften im kompakten Fall. □

Wir betrachten im folgenden stets obige Metrik auf $C(I)$ und die zugehörige Topologie samt Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}(C(I))$.

Proposition 4.

$$\mathfrak{B}(C(I)) = \sigma(\{f \mapsto f(t) : t \in I\}).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{G} = \sigma(\{f \mapsto f(t) : t \in I\})$. Für jedes $t \in I$ ist $f \mapsto f(t)$ stetig und somit Borel-meßbar. Also folgt: $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}(C(I))$.

Wir zeigen:

$$\mathfrak{G} \text{ enthält alle offenen Kugeln.} \tag{3}$$

Ersetze in $\rho(\cdot, f_0)$ die Maxima über $[0, n]$ durch die Suprema über $[0, n] \cap \mathbb{Q}$. Man erhält so eine $\mathfrak{G}$-meßbare Abbildung $\widetilde{\rho}(\cdot, f_0)$, und es gilt $\rho(\cdot, f_0) = \widetilde{\rho}(\cdot, f_0)$. Hiermit folgt (3).

In jedem separablen metrischen Raum gilt: jede offene Menge ist abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln. Mit (3) folgt: $\mathfrak{G}$ enthält alle offenen Teilmengen von $C(I)$. Also: $\mathfrak{B}(C(I)) \subset \mathfrak{G}$. □

Obige Ergebnisse gelten analog[8] im Falle einer Indexmenge $[0, T]$. Für $A \subset C(I)$

$$A \in \sigma(\{f \mapsto f(t) : t \in [0, T]\}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, B \in \mathfrak{B}(C([0, T])) : A = \{f|_{[0,T]} \in B\}. \tag{4}$$

Betrachte Prozeß $(X_t)_{t \in I}$ mit stetigen Pfaden auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist

$$\Psi : \Omega \to C(I) : \omega \mapsto X_\cdot(\omega)$$

wohldefiniert und Proposition 4 sichert die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}(C(I))$-Meßbarkeit von Ψ.

Definition 2. In obiger Situation heißt ΨP die *Verteilung*[9] von X (auf dem Raum $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)))$).

[7] Konvergenz: gleichmäßige Konvergenz auf beliebigen Kompakta.
[8] Normierter Raum $(C([0, T]), \|\cdot\|_\infty)$.
[9] $\Psi P(A) = P(\Psi^{-1} A) = P(\{\omega \in \Omega : X_\cdot(\omega) \in A\})$ für $A \in \mathfrak{B}(C(I))$.

Im folgenden studieren wir Verteilungen auf $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)))$.

Lemma 2. Gegeben Prozesse $X^{(i)}$ auf $(\Omega^{(i)}, \mathfrak{A}^{(i)}, P^{(i)})$ mit stetigen Pfaden, $i = 1, 2$. Dann sind äquivalent

(i) $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ besitzen dieselben endlich-dimensionalen Randverteilungen,

(ii) die Verteilungen von $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ stimmen überein.

Beweis. „(ii) $\Rightarrow$ (i)“ klar.
„(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Die Zylindermengen

$$\{f \in C(I) : (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in A\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in I$ und $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ bilden gemäß Proposition 4 einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathfrak{B}(C(I))$. Nach Voraussetzung stimmen hierauf die Verteilungen von $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ überein. Verwende den Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße, siehe Gänssler, Stute (1977, Satz 1.4.10). $\square$

Definition 3. Das *Wiener-Maß* P_* ist die Verteilung einer Brownschen Bewegung.

Wir halten fest: der durch $W_t(f) = f(t)$ auf $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)), P_*)$ definierte Prozeß ist eine Brownsche Bewegung bezüglich seiner kanonischen Filtration; genannt: *das kanonische Modell der Brownschen Bewegung*. Der Beweis von (iv.a) beruht auf Lemma I.5; der Rest ist klar. Siehe (4) zur kanonischen Filtration.

2.2 Schwache Konvergenz

Im folgenden: (M, ρ) metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}(M)$. Bez.: $\mathfrak{M}(M)$ Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(M, \mathfrak{B}(M))$.

Definition 4. Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}(M)$ *konvergiert schwach* gegen $P \in \mathfrak{M}(M)$, falls

$$\lim_{n \to \infty} \int_M \varphi \, dP_n = \int_M \varphi \, dP \tag{5}$$

für alle stetigen beschränkten Abbildungen $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Bez.: $P_n \to P$.

Erinnerung Zentraler Grenzwertsatz: schwache Konvergenz der Verteilungen von standardisierten Partialsummen gegen die Standard-Normalverteilung.

Proposition 5. Äquivalent sind[10]

(i) $P_n \to P$,

(ii) (5) gilt für alle gleichmäßig stetigen beschränkten Abbildungen $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

(iii) $\forall\, A \subset M$ offen : $\quad \liminf_{n \to \infty} P_n(A) \geq P(A)$,

[10] Notation: ∂A Rand von A.

(iv) $\forall\, A \in \mathfrak{B}(M): \quad P(\partial A) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$

Beweis. Siehe Gänssler, Stute (1977, p. 342–344). □

Fortan (M, ρ) vollständig und separabel.

Proposition 6. Es existiert eine Metrik Δ auf $\mathfrak{M}(M)$, so daß $(\mathfrak{M}(M), \Delta)$ vollständig und separabel ist und

$$P_n \to P \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \Delta(P_n, P) = 0$$

für alle $P, P_1, \ldots \in \mathfrak{M}(M)$ gilt.

Beweis. Siehe Parthasarathy (1967, Sec. II.6). □

Somit: der schwache Limes ist eindeutig bestimmt.
Im folgenden stets obige Metrik auf $\mathfrak{M}(M)$.

Definition 5. $\Pi \subset \mathfrak{M}(M)$ heißt *straff*, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K \subset M \text{ kompakt } \;\forall\, P \in \Pi : P(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Satz I.14 sichert, daß einelementige Teilmengen straff sind.

Satz 3 (Prohorov)**.** Für $\Pi \subset \mathfrak{M}(M)$

$$\Pi \text{ relativ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \Pi \text{ straff.}$$

Beweis. Siehe Parthasarathy (1967, p. 48–49). □

2.3 Das Donskersche Invarianzprinzip

Funktionale Version des Zentralen Grenzwertsatzes.
Gegeben $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ reellwertig, iid. auf Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$E(\xi_j) = 0, \qquad E(\xi_j^2) = \sigma^2 \in \,]0, \infty[\,.$$

Definiere $X : \Omega \to C(I)$ durch[11]

$$X(\omega)(k) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j(\omega), \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$\begin{aligned} X(\omega)(t) &= (t-k)\cdot X(\omega)(k+1) + (k+1-t)\cdot X(\omega)(k) \\ &= X(\omega)(k) + (t-k)\cdot \xi_{k+1}(\omega), \qquad t \in [k, k+1]. \end{aligned}$$

[11]Stückweise lineare Interpolation der zugehörigen Irrfahrt.

Skaliere wie folgt

$$X^{(n)}(\omega)(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot X(\omega)(n \cdot t), \qquad t \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 4 sichert die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}(C(I))$-Meßbarkeit von X und $X^{(n)}$, und diese Abbildungen definieren Prozesse mit stetigen Pfaden[12].
Für $s = k/n$ und $t = \ell/n$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ und $k < \ell$ gilt

$$X_t^{(n)} - X_s^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot (\xi_{k+1} + \cdots + \xi_\ell).$$

Also

$$E(X_t^{(n)} - X_s^{(n)}) = 0, \qquad E(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^2 = t - s,$$

und $X_t^{(n)} - X_s^{(n)}$ ist unabhängig von

$$\mathfrak{F}_s^{X^{(n)}} = \sigma(\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}).$$

Beachte

$$X_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \xi_k.$$

Der Zentrale Grenzwertsatz zeigt

$$X_1^{(n)} P \to N(0,1).$$

Satz 4 (Donsker)**.** Sei $P_n = X^{(n)}P$ die Verteilung von $X^{(n)}$, und sei P_* das Wiener-Maß. Dann

$$P_n \to P_*.$$

Beweisskizze. Details bei Karatzas, Shreve (1999, Sec. 2.4).
Wg. Proposition 6 ist zu zeigen: jede Teilfolge von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine Teilfolge, die gegen P_* konvergiert.
Betrachte den Stetigkeitsmodul

$$m_t(f;\delta) = \sup\{|f(r) - f(s)| : r, s \in [0,t],\ |r - s| \le \delta\})$$

von $f \in C(I)$ auf $[0,t]$. Satz 3 und der Satz von Arzela-Ascoli führen auf folgendes Kompaktheitskriterium für beliebige Folgen $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}(C(I))$. Äquivalent sind

1. $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ straff,
2. $$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\{|f(0)| > \lambda\}) = 0$$

   und

   $$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\{m_t(f;\delta) > \varepsilon\}) = 0$$

   für alle $\varepsilon > 0$ und $t \in I$.

[12] Schreibe $X_t(\omega) = X(\omega)(t)$. Analog für $X^{(n)}$

Man verifiziert 2.) für $P_n = Q_n$, und somit gilt: jede Teilfolge von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Betrachte nun die „endlich-dimensionalen Randverteilungen" der Maße P_n. Dazu sei

$$\pi_{t_1,\dots,t_k} : C(I) \to \mathbb{R}^k : f \mapsto (f(t_1), \dots, f(t_k))$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in I$ paarweise verschieden. Für alle k und t_i zeigt man

$$\pi_{t_1,\dots,t_k} P_n \to N(0, K),$$

wobei K durch (1) gegeben ist[13]. Damit folgt die Unabhängigkeit des Grenzwertes von den betrachteten Teilfolgen, vgl. Lemma 2. Ebenso folgt, daß dieser Grenzwert das Wiener-Maß ist. □

Beachte: Obiger Beweis beinhaltet eine weitere Konstruktion der Brownschen Bewegung (und des Wiener-Maßes).

Satz 4 ermöglicht die näherungsweise Berechnung von Funktionalen der Brownschen Bewegung z. Bsp. mittels Monte-Carlo-Methoden (Simulation von Irrfahrten).

3 Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ sowie $d \in \mathbb{N}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

3.1 Mehrdimensionale Brownsche Bewegung

Definition 6. $W = (W_t)_{t\in I}$ *d-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}$ mit Startverteilung μ*, falls

(i) W $\mathbb{R}^d$-wertig mit stetigen Pfaden,

(ii) W adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(iii) $W_0 P = \mu$,

(iv) für $0 \le s < t$ ist $W_t - W_s$

  (a) unabhängig von $\mathfrak{F}_s$,

  (b) $N(0, (t-s)\,\mathrm{Id}_d)$-verteilt.

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}^d$*.

[13] Für $k = t_1 = 1$ ist dies der Zentrale Grenzwertsatz.

Für jede d-dimensionale Brownsche Bewegung $W = \left(\left(W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)}\right)\right)_{t \in I}$ mit Startpunkt $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$ gilt: $W^{(1)}, \ldots, W^{(d)}$ sind unabhängige Brownsche Bewegungen der Dimension eins mit Startpunkten $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$.

Konstruktion[14] : $\Omega = (C(I))^d$, $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B}(C(I)))^d$,

$$W_t((f_1, \ldots, f_d)) = (f_1(t), \ldots, f_d(t))$$

mit kanonischer Filtration, P^0 d-faches Produkt des Wiener-Maßes, Wahrscheinlichkeitsmaß $P = P^\mu$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ definiert durch[15]

$$P^\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{P^0(A - x)}_{=P^x(A)} \, d\mu(x), \qquad A \in \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 72) zur $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$-$\mathfrak{B}([0,1])$-Meßbarkeit von $x \mapsto P^x(A)$.

Im Sinne der schwachen Konvergenz kann eine d-dimensionale Brownsche Bewegung durch eine d-dimensionale Irrfahrt approximiert werden.

Definition 7. Sei M metrischer Raum und $\mu \in \mathfrak{M}(M)$. Bezeichne mit $\overline{\mathfrak{B}(M)}^\mu$ die μ-Vervollständigung von $\mathfrak{B}(M)$. Dann heißt

$$\mathfrak{U}(M) = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}(M)} \overline{\mathfrak{B}(M)}^\mu$$

die σ-Algebra der *universell meßbaren Mengen.* Kurz: universelle Meßbarkeit für $\mathfrak{U}(M)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$-Meßbarkeit.

Definition 8. *d-dimensionale Brownsche Familie* ist eine Familie $(W_t)_{t \in I}$ von Abbildungen $W_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(W_t)_{t \in I}$ ist Brownsche Bewegung mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$.

Konstruktion: siehe oben; hier wird sogar die Borel-Meßbarkeit in (i) erreicht.

Eine Brownsche Familie liefert Brownsche Bewegungen mit beliebigen Startverteilungen gemäß (6).

3.2 Markov-Prozesse

Motivation: „Gedächtnislosigkeit“ von Irrfahrten.

Definition 9. $\mathbb{R}^d$-wertiger adaptierter Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ heißt *Markov-Prozeß mit Startverteilung* μ, falls

(i) $X_0 P = \mu$,

[14] Es gilt $(\mathfrak{B}(C(I)))^d = \mathfrak{B}(C(I)^d)$, siehe Gänssler, Stute (1977, Satz 1.3.13).

[15] Vgl. Faltung.

(ii) für $s, t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \,|\, \mathfrak{F}_s) = P(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \,|\, X_s).$$

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *Markov-Prozeß mit Startpunkt* $x \in \mathbb{R}^d$.

Analog für Teilmengen von $[0, \infty[$ als Indexmengen, insbesondere für die diskrete Indexmenge $\mathbb{N}_0$.

Proposition 7. Sei X Markov-Prozeß. Setze $\mathfrak{B}_s = \sigma(\{X_u : u \geq s\})$. Dann

(i) für $s \in I$ und $A \in \mathfrak{B}_s$
$$P(A \,|\, \mathfrak{F}_s) = P(A \,|\, X_s),$$

(ii) für $s \in I$ und Y $\mathfrak{B}_s$-meßbar mit $E(|Y|) < \infty$
$$E(Y \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(Y \,|\, X_s).$$

Beweis. ad (i): siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 76, 77).
ad (ii): algebraische Induktion unter Verwendung von (i). □

Definition 10. *d-dimensionale Markov-Familie* ist eine Familie $(X_t)_{t \in I}$ von Abbildungen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(X_t)_{t \in I}$ ist Markov-Prozeß mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$,

(iii) für $x \in \mathbb{R}^d$, $s, t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt
$$P^x(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \,|\, X_s = y) = P^y(\{X_t \in \Gamma\})$$
für $X_s P^x$ f.a. $y \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 8. Jede d-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein Markov-Prozeß. Jede d-dimensionale Brownsche Familie ist eine Markov-Familie.

Beweis. Betrachte d-dimensionale Zufallsvektoren X, Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine σ-Algebra $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{A}$. Gelte: X und $\mathfrak{G}$ unabhängig, Y $\mathfrak{G}$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$-meßbar. Dann folgt für $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$
$$P(\{X + Y \in \Gamma\} \,|\, \mathfrak{G}) = P(\{X + Y \in \Gamma\} \,|\, Y) \tag{7}$$
und für $Y P$-f.a. $y \in \mathbb{R}^d$
$$P(\{X + Y \in \Gamma\} \,|\, Y = y) = P(\{X + y \in \Gamma\}), \tag{8}$$
siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 121).
Anwendung: $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_s$, $X = W_{s+t} - W_s$, $Y = W_s$. Mit (7) folgt: W ist Markov-Prozeß. Ferner liefert (8)
$$P^x(\{W_{s+t} \in \Gamma\} \,|\, W_s = y) = P^x(\{W_{s+t} - W_s + y \in \Gamma\}).$$
Die Verteilung von $W_{s+t} - W_s + y$ bzgl. P^x ist $N(y, t\,\mathrm{Id}_d)$ und stimmt folglich mit der Verteilung von W_t bzgl. P^y überein. □

Bemerkung 2. Es gilt weder „Markov-Prozeß $\Rightarrow$ Martingal" noch „Martingal $\Rightarrow$ Markov-Prozeß". Gegenbeispiel zur ersten Implikation: Poisson-Prozeß; Beweis siehe oben. Gegenbeispiel zur zweiten Implikation: Übung 6.4.

3.3 Starke Markov-Eigenschaft und Spiegelungsprinzip

Betrachte eine eindimensionale Brownsche Bewegung W bzgl. $\mathfrak{F}$ und ihre *Niveauzeiten*

$$T_b(\omega) = \inf\{t \in I : W_t(\omega) = b\}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Diese sind Stoppzeiten, siehe Proposition I.5.(ii).
Fragen: Wie lautet die Verteilung von T_b? Gilt insbesondere $T_b < \infty$ P-f.s.? Im Falle einer positiven Antwort: ist $(W_{T_b+t} - W_{T_b})_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung und unabhängig von $\mathfrak{F}_{T_b}$?
Setze

$$\mathfrak{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathfrak{F}_{t+\varepsilon}$$

sowie

$$\mathfrak{F}_{T+} = \{A \in \mathfrak{A} : \forall\, t \in I : A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_{t+}\}$$

für optionale Zeiten $T : \Omega \to I \cup \{\infty\}$.

Bemerkung 3.

(i) $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in I}$ ist rechtsseitig stetige Filtration mit $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$,

(ii) T optionale Zeit bzgl. $\mathfrak{F} \Leftrightarrow T$ Stoppzeit bzgl. $\mathfrak{F}_+$

(iii) $\mathfrak{F}_{T+}$ ist σ-Algebra. Ferner $\mathfrak{F}_T \subset \mathfrak{F}_{T+}$ für Stoppzeiten T.

Definition 11. Optionale Zeit T heißt *P-endlich*, falls $P(\{T < \infty\}) = 1$.

Definition 12. $\mathbb{R}^d$-wertiger progressiv meßbarer Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ heißt *starker Markov-Prozeß mit Startverteilung μ*, falls

(i) $X_0 P = \mu$,

(ii) für $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede P-endliche optionale Zeit S gilt

$$P(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \,|\, \mathfrak{F}_{S+}) = P(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \,|\, X_S).$$

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *starker Markov-Prozeß mit Startpunkt $x \in \mathbb{R}^d$*.

Definition 13. *d-dimensionale starke Markov-Familie* ist eine Familie $(X_t)_{t\in I}$ von Abbildungen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(X_t)_{t\in I}$ ist starker Markov-Prozeß mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$,

(iii) für $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede P^x-endliche optionale Zeit S gilt

$$P^x(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \mid X_S = y) = P^y(\{X_t \in \Gamma\})$$

für $X_S P^x$ f.a. $y \in \mathbb{R}^d$.

Satz 5. Jede d-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein starker Markov-Prozeß. Jede d-dimensionale Brownsche Familie ist eine starke Markov-Familie.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, Sections 2.6 B, C). □

Im folgenden sei W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und S eine P-endliche optionale Zeit.

Satz 6. Durch

$$B_t = W_{S+t} - W_S, \qquad t \in I,$$

wird eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathfrak{F}_t^B)$ mit Startwert 0 definiert, die unabhängig von $\mathfrak{F}_{S+}$ ist.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 86, 87). □

Satz 7 (Spiegelungsprinzip)**.** Sei S Stoppzeit und $d = 1$. Durch

$$B_t = \begin{cases} W_t & \text{falls } 0 \leq t < S \\ 2W_S - W_t & \text{falls } t \geq S \end{cases}$$

wird eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathfrak{F}_t^B)$ mit Startwert 0 definiert.

Beweis. Siehe Partzsch (1984, p. 47). □

Anwendung: Die Verteilungen der Niveauzeiten T_b und damit der Maxima auf kompakten Intervallen $[0, u]$ für eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0. OBdA[16] $b > 0$. Für $u > 0$

$$\begin{aligned} P(\{T_b \leq u\}) &= P(\{\max_{t \in [0,u]} W_t \geq b\}) \\ &= P(\{T_b \leq u\} \cap \{W_u \leq b\}) + P(\{T_b \leq u\} \cap \{W_u > b\}) \\ &= P(\{T_b \leq u\} \cap \{W_u \leq b\}) + P(\{W_u > b\}). \end{aligned}$$

Mit Satz 7 folgt

$$P(\{T_b \leq u\} \cap \{W_u \leq b\}) = P(\{W_u \geq b\}).$$

Fazit

$$\begin{aligned} P(\{T_b \leq u\}) = 2 \cdot P(\{W_u \geq b\}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\, u}} \cdot \int_b^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2u}\right) dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{b/\sqrt{u}}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \end{aligned}$$

[16] Mit W ist auch $-W$ Brownsche Bewegung bzgl. derselben Filtration, siehe Proposition 11.

3.4 Brownsche Filtrationen

Die Filtration im kanonischen Modell der Brownschen Bewegung ist nicht rechtsseitig stetig. Ferner existieren in diesem Modell Mengen $A \in \mathfrak{B}(C(I))$ mit $P_*(A) = 0$ und $A \notin \mathfrak{F}_t$ für alle $t \in I$, vgl. Übung 7.2.

Für beliebige Filtrationen $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ setzen wir

$$\mathfrak{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \in I} \mathfrak{F}_t\right).$$

Betrachte einen d-dimensionalen Prozeß X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit seiner kanonischen Filtration $\mathfrak{F}^X$. Setze

$$\mathfrak{N}^P = \{A \subset \Omega : \exists\, B \in \mathfrak{F}_\infty^X : A \subset B \wedge P(B) = 0\}.$$

Nach Einschränkung von P auf $\mathfrak{F}_\infty^X$ und anschließender Vervollständigung erhält man ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathfrak{F}_\infty^X \cup \mathfrak{N}^P)$, welches wieder mit P bezeichnet wird. Durch

$$\mathfrak{F}_t^P = \sigma(\mathfrak{F}_t^X \cup \mathfrak{N}^P), \qquad t \in I,$$

erhält man eine von X und P abhängige Filtration $\mathfrak{F}^P$, genannt die *augmentierte Filtration.*

Proposition 9. Für jeden starken Markov-Prozeß erfüllt $\mathfrak{F}^P$ die üblichen Voraussetzungen.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 90) zum Beweis der rechtsseitigen Stetigkeit. Klar: $\mathfrak{N}^P \subset \mathfrak{F}_0^P$. □

Proposition 10. Für jede d-dimensionale Brownsche Bewegung W gilt: W ist auch bzgl. $\mathfrak{F}^P$ eine Brownsche Bewegung.

Beweis. Klar. □

Somit insbesondere konstruiert: eine Brownsche Bewegung unter den üblichen Voraussetzungen über die Filtration.

Betrachte nun eine Brownsche Familie $(W_t)_{t \in I}$, $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$. Definiere P^μ gemäß (6) sowie

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_t = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)} \mathfrak{F}_t^{P^\mu}, \qquad t \in I.$$

Klar: die Filtration $\widetilde{\mathfrak{F}}$ ist rechtsseitig stetig und es gilt

$$\mathfrak{F}_t^W \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_t \subset \mathfrak{F}_t^{P^\mu}.$$

Satz 8. Jede d-dimensionale Brownsche Familie $(W_t)_{t \in I}$, $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ ist auch bzgl. der Filtration $(\widetilde{\mathfrak{F}}_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{F}}_\infty)$ eine d-dimensionale Brownsche Familie.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 93). Im Beweis läßt sich nur die universelle Meßbarkeit der Abbildungen $x \mapsto P^x(F)$ für alle $F \in \widetilde{\mathfrak{F}}_\infty$ zeigen. □

Obige Filtration $\widetilde{\mathfrak{F}}$ heißt auch die *universelle Filtration* der Brownschen Familie.

4 Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung

Im folgenden sei $W = (W_t)_{t\in I}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bzgl. der Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$.

Proposition 11 (Symmetrie)**.** $(-W_t)_{t\in I}$ ist Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit Startwert 0.

Proposition 12 (Skalierungsinvarianz)**.** Für jedes $c > 0$ definiert

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot W_{c\cdot t}, \qquad t \in I,$$

eine Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathfrak{F}_{c\cdot t})_{t\in I}$ mit Startwert 0.

Beweise der nachstehenden Fakten finden sich bei Karatzas, Shreve (1999, Chap. 2.9).

Proposition 13 (Projektive Spiegelung bei $t = \infty$)**.** Durch

$$X_t = \begin{cases} t \cdot W(1/t) & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

wird eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}^X$ mit Startwert 0 definiert.

Proposition 14 (Zeitumkehr)**.** Für jedes $T > 0$ wird durch

$$X_t = W_T - W_{T-t}, \qquad t \in [0, T],$$

eine Brownsche Bewegung auf $[0, T]$ bzgl. $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$ mit Startwert 0 definiert.

Proposition 15 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.**

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0 \qquad P\text{-f.s.}$$

Proposition 16 (Gesetz vom iterierten Logarithmus)**.**

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \cdot \ln\ln t}} = 1 \qquad P\text{-f.s.}$$

Proposition 17 (Hölder-Stetigkeit und Nichtdifferenzierbarkeit)**.** P-f.s. gilt: W in keinem Punkt Hölder-stetig mit Exponent $\gamma > 1/2$.

Vgl. Abschnitt 1.

Proposition 18 (Lévyscher Stetigkeitsmodul)**.**

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{m_1(W;\delta)}{\sqrt{2\delta \cdot \ln \delta^{-1}}} = 1 \qquad P\text{-f.s.}$$

Betrachte die *Niveaumengen*

$$Z_b(\omega) = \{t \in I : W_t(\omega) = b\}.$$

Proposition 19. P-f.s. gilt: Z_b ist abgeschlossen und unbeschränkt, hat Lebesgue-Maß null besitzt den Häufungspunkt null für $b = 0$ und keine isolierten Punkte in $]0, \infty[$.

Kapitel III

Stochastische Integration

Literatur:

Karatzas, Shreve (1999, Chap. 3).

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration[1] $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ für $I = [0, \infty[$, die den üblichen Voraussetzungen genügt, sowie Prozesse $X = (X_t)_{t \in I}$ und $M = (M_t)_{t \in I} \in \mathfrak{M}_2^c$.
Speziell: $M = W$ eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0.

1 Konstruktion des stochastischen Integrals

Die Sätze I.11 und I.12 zeigen in nichttrivialen Fällen[2] für alle $t > 0$: P-f.s. ist M von unbeschränkter Variation auf $[0, t]$. Somit ist eine pfadweise Definition von stochastischen Integralen

$$I_t(X)(\omega) = \int_0^t X_u(\omega)\, dM_u(\omega), \qquad t \in I,\ \omega \in \Omega,$$

i.a. nicht möglich.

1.1 Integral für einfache Prozesse

Definition 1. X *einfach*, falls

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega) \cdot 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{1}$$

mit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots, \qquad \lim_{i \to \infty} t_i = \infty$$

[1] Im folgenden Adaptiertheit und Martingaleigenschaft stets bzgl. dieser Filtration.
[2] Insbesondere für $M = W$.

und Zufallsvariablen ξ_i auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so daß

$$\sup_{\omega\in\Omega}\sup_{i\in\mathbb{N}_0} |\xi_i(\omega)| < \infty$$

und

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_0 : \quad \xi_i\ \mathfrak{F}_{t_i}\text{-meßbar.}$$

Bez.: $\mathfrak{L}_0$ Vektorraum der einfachen Prozesse. *Stochastisches Integral* von X gem. (1) bzgl. M auf $[0, t]$:

$$I_t(X)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(\omega) \cdot (M_{t_{i+1}}(\omega) - M_{t_i}(\omega)) + \xi_n(\omega) \cdot (M_t(\omega) - M_{t_n}(\omega)),$$

falls $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

Also kurz

$$I_t(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \xi_i \cdot (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}).$$

Lemma 1. Sei $A = (A_t)_{t\in I}$ stetig und wachsend. Dann sind äquivalent

(i) $\forall\, 0 \le s < t : \quad E((M_t - M_s)^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(A_t - A_s \,|\, \mathfrak{F}_s)$,

(ii) $A = \langle M \rangle$.

Beweis. „(ii) $\Rightarrow$ (i)“ siehe Beweis von Satz I.11.
„(i) $\Rightarrow$ (ii)“: folgt aus

$$E(M_t^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) - M_s^2 = E((M_t - M_s)^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(A_t \,|\, \mathfrak{F}_s) - A_s$$

und der Eindeutigkeitsaussage für die Doob-Meyer-Zerlegung von M^2. □

Proposition 1.

(i) $I_t(\cdot)$ ist wohldefiniert und linear auf $\mathfrak{L}_0$,

(ii) für $X \in \mathfrak{L}_0$ gilt $(I_t(X))_{t\in I} \in \mathfrak{M}_2^c$ und[3]

$$\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u,$$

(iii) für $X \in \mathfrak{L}_0$ gilt

$$E(I_t(X)^2) = E\left(\int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u\right).$$

[3] Das rechts stehende Integral ist pfadweise definiert.

Beweis. ad (i): klar.
ad (ii): Für $0 \leq s < t$ und $i \in \mathbb{N}_0$ gilt[4]

$$E(\xi_i \cdot (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}) \,|\, \mathfrak{F}_s) = \xi_i \cdot (M_{s\wedge t_{i+1}} - M_{s\wedge t_i}).$$

Hiermit folgt die Martingaleigenschaft von $I(X)$, und jetzt ist klar: $I(X) \in \mathfrak{M}_2^c$.
Durch

$$A_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u$$

wird offenbar ein wachsender stetiger Prozeß definiert. Zu zeigen bleibt die Martingaleigenschaft von $I(X)^2 - A$. Gelte $s \in [t_{m-1}, t_m[$ und $t \in [t_n, t_{n+1}[$, also $m - 1 \leq n$.
1. Fall: $m - 1 < n$. Dann

$$\begin{aligned} &I_t(X) - I_s(X) \\ &\quad = \xi_{m-1} \cdot (M_{t_m} - M_s) + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i \cdot (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n \cdot (M_t - M_{t_n}). \end{aligned}$$

Gelte $0 \leq s < t \leq u < v$ und sei Y beschränkt und $\mathfrak{F}_u$-meßbar. Dann

$$E(Y \cdot (M_v - M_u) \cdot (M_t - M_s) \,|\, \mathfrak{F}_u) = 0.$$

Mit Lemma 1 folgt

$$\begin{aligned} &E((I_t(X) - I_s(X))^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) \\ &= E\left(\xi_{m-1}^2 \cdot (M_{t_m} - M_s)^2 + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i^2 \cdot (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \xi_n^2 \cdot (M_t - M_{t_n})^2 \,|\, \mathfrak{F}_s\right) \\ &= E\left(\xi_{m-1}^2 \cdot (\langle M\rangle_{t_m} - \langle M\rangle_s) + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i^2 \cdot (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) + \xi_n^2 \cdot (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_n}) \,|\, \mathfrak{F}_s\right) \\ &= E\left(\int_s^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_s\right) = E(A_t - A_s \,|\, \mathfrak{F}_s). \qquad (2) \end{aligned}$$

Wende nochmals Lemma 1 an.
2. Fall: $m - 1 = n$. Einfacher.
ad (iii): Wähle $s = 0$ und integriere (2). □

1.2 Fortsetzung des Integrals

Wir definieren zunächst I für eine Klasse von Prozessen, die $\mathfrak{L}_0$ umfaßt, wobei insbesondere die Eigenschaften aus Proposition 1 erhalten bleiben.
Betrachte das durch

$$\mu_M(A) = \int_\Omega \int_0^\infty 1_A(u, \omega) \, d\langle M\rangle_u(\omega) \, dP(\omega)$$

[4] Fallunterscheidung; siehe auch Übung 3.2.

definierte[5] Maß[6] μ_M auf $(I \times \Omega, \mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A})$. Im Spezialfall $M = W$ erhält man

$$\mu_W = \lambda \otimes P,$$

wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet.

Definition 2. Sei X meßbar und adaptiert. Setze[7]

$$[X]_t^2 = E\left(\int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u\right)$$

sowie

$$[X] = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t} \cdot (1 \wedge [X]_t).$$

Bezeichne mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(M)$ und $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}^*(M)$ die Vektorräume der (μ_M-Äquivalenzklassen von) meßbaren adaptierten bzw. progressiv meßbaren Prozesse X mit $[X]_t < \infty$ für alle $t \in I$.

Klar

$$\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{L}.$$

Wir betrachten fortan stets die durch $[X - Y]$ definierte Metrik auf $\mathfrak{L}$.

Lemma 2. Sei X meßbar, adaptiert und beschränkt durch $c \geq 0$. Dann existiert eine Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von durch c beschränkten Prozessen in $\mathfrak{L}_0$ mit

$$\forall\, t \in I: \quad \lim_{n \to \infty} E\left(\int_0^t (X_u - X_u^{(n)})^2 \, du\right) = 0.$$

Beweis.
1. Fall: X stetig. Interpolation durch Treppenfunktionen, Lebesguescher Grenzwertsatz.
2. Fall: X progressiv meßbar. Setze[8]

$$Y_s(\omega) = \int_0^{s \wedge t} X_u(\omega) \, du, \qquad Z_s^{(m)}(\omega) = m \cdot \big(Y_s(\omega) - Y_{(s-1/m)\vee 0}(\omega)\big)$$

für $m \in \mathbb{N}$. Es gilt: Y, $Z^{(m)}$ sind stetig, adaptiert, und damit progressiv meßbar, und $Z^{(m)}$ ist beschränkt durch c. Der Lebesguesche Differentiationssatz sichert

$$\forall\, \omega \in \Omega: \left(\lim_{m \to \infty} Z_\cdot^{(m)}(\omega) = X_\cdot(\omega) \quad \lambda\text{-f.s.}\right),$$

und deshalb

$$\lim_{m \to \infty} Z^{(m)} = X \quad \lambda \otimes P\text{-f.s.}$$

[5] μ_M ist wohldefiniert, siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. 1.8) oder Übung 8.2.
[6] *Previsible* σ-Algebra $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A}$: erzeugt von Mengen der Form $]s,t] \times B$ mit $B \in \mathfrak{F}_s$ sowie $\{0\} \times B$ mit $B \in \mathfrak{F}_0$. Einfache Prozesse sind $\mathfrak{P}$-meßbar; $\mathfrak{P}$-meßbare Prozesse sind progressiv meßbar. Siehe Irle (1998, p. 170). *Doléans-Maß*: Einschränkung von μ_M auf $\mathfrak{P}$.
[7] $[X]_t$ ist L_2-Norm von $1_{[0,t]} \cdot X$ bzgl. μ_M.
[8] Notation: $\vee$ für max.

Mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t (X_u - Z_u^{(m)})^2 \, du\right) = 0.$$

Approximiere $Z^{(m)}$ geeignet gemäß Fall 1.).
3. Fall: X meßbar, adaptiert. Wir zeigen, daß Y wiederum adaptiert ist. Jeder Prozeß X wie oben besitzt eine progressiv meßbare Modifikation $\widetilde{X}$, siehe Karatzas, Shreve (1999, Prop. I.1.12). Wir zeigen, daß durch

$$\widetilde{Y}_s(\omega) = \int_0^{s\wedge t} \widetilde{X}_u(\omega) \, du, \qquad s \in I,$$

eine Modifikation des oben definierten Prozesses Y gegeben ist. Betrachte den adaptierten meßbaren Prozeß

$$\eta_s(\omega) = 1_{\{X_s \neq \widetilde{X}_s\}}(\omega), \qquad s \in I.$$

Es gilt

$$E\left(\int_0^t \eta_u \, du\right) = \int_0^t E(\eta_u) \, du = \int_0^t P(\{X_u \neq \widetilde{X}_u\}) \, du = 0$$

und somit

$$P\left(\left\{\int_0^t \eta_u \, du = 0\right\}\right) = 1.$$

Weiterhin

$$\{Y_s \neq \widetilde{Y}_s\} \subset \left\{\int_0^t \eta_u \, du > 0\right\}.$$

Also ist $\widetilde{Y}$ eine Modifikation von Y, und unter den üblichen Voraussetzungen ist mit $\widetilde{Y}$ auch Y adaptiert. Fahre fort wie im 2. Fall. □

Proposition 2. Für P-f.a. ω sei $\langle M \rangle.(\omega)$ absolutstetig bzgl. λ. Dann liegt $\mathfrak{L}_0$ dicht in $\mathfrak{L}$.

Beweis. Sei $X \in \mathfrak{L}$.
1. Fall: X beschränkt. Sei $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Lemma 2 gewählt. Dann ex. eine Teilfolge $(X^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Menge $A \in \mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A}$ mit

$$\forall\ (t,\omega) \in (I \times \Omega) \setminus A : \quad \lim_{k\to\infty} X_t^{(n_k)}(\omega) = X_t(\omega)$$

und

$$(\lambda \otimes P)(A) = 0.$$

Es folgt $\mu_M(A) = 0$, und der Lebesguesche Grenzwertsatz zeigt

$$\lim_{k\to\infty} [X - X^{(n_k)}]_t = 0$$

für alle $t \in I$.

2. Fall: X beliebig. Lokalisation. Setze

$$X_t^{(k)} = X_t \cdot 1_{\{|X_t| \le k\}}, \qquad t \in I,\ k \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\lim_{k \to \infty} [X - X^{(k)}]_t = 0.$$

Approximiere die beschränkten Prozesse $X^{(k)}$ gem. Fall 1. □

Proposition 2 ist insbesondere im Falle $M = W$ anwendbar. Allgemein gilt:

Proposition 3. $\mathfrak{L}_0$ liegt dicht in $\mathfrak{L}^*$.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 135–137). □

Definition 3. Für $Y \in \mathfrak{M}_2^c$ sei

$$\|Y\|_t^2 = E(Y_t^2), \qquad t \in I.$$

sowie

$$\|Y\| = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t} \cdot (1 \wedge \|Y\|_t).$$

Beachte: für $Y \in \mathfrak{M}_2^c$ ist $t \mapsto E(Y_t^2)$ monoton wachsend. Wir identifizieren im folgenden ununterscheidbare Elemente aus $\mathfrak{M}_2^c$.

Proposition 4. $\mathfrak{M}_2^c$ ist ein vollständiger metrischer Raum bzgl. der durch $(Y, Z) \mapsto \|Y - Z\|$ definierten Metrik.

Beweis. Übung 8.4. □

Wir betrachten fortan stets obige Metrik auf $\mathfrak{M}_2^c$.

Satz 1. Die in Definition 1 eingeführte lineare Abbildung

$$I : \mathfrak{L}_0 \to \mathfrak{M}_2^c$$

läßt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung

$$I : \mathfrak{L}^* \to \mathfrak{M}_2^c$$

mit

$$\forall\, t \in I : \quad \|I(X)\|_t = [X]_t \tag{3}$$

fortsetzen. Es gilt wiederum

$$\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M \rangle_u.$$

Beweis. Zu $X \in \mathfrak{L}^*$ wähle man gemäß Proposition 3 eine Folge $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{L}_0$ mit $\lim_{n\to\infty}[X - X^{(n)}] = 0$. Proposition 1 zeigt

$$\|I(X^{(n)}) - I(X^{(m)})\| = \|I(X^{(n)} - X^{(m)})\| = [X^{(m)} - X^{(n)}],$$

so daß Proposition 4 die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} I(X^{(n)})$ in $\mathfrak{M}_2^c$ sichert. Wir definieren

$$I(X) = \lim_{n\to\infty} I(X^{(n)})$$

und halten fest, daß $I(X)$ nicht von der Wahl der approximierenden Folge $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt. Die Linearität von I sowie (3) sind klar. Ebenso die Eindeutigkeit der Fortsetzung.

Gelte $0 \le s < t$ und sei $A \in \mathfrak{F}_s$. Man erhält[9] unter Verwendung von (2)

$$\begin{aligned}\int_A \big(I_t(X) - I_s(X)\big)^2 \, dP &= \lim_{n\to\infty} \int_A \big(I_t(X^{(n)}) - I_s(X^{(n)})\big)^2 \, dP \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A \int_s^t \big(X_u^{(n)}\big)^2 \, d\langle M\rangle_u \, dP \\ &= \int_A \int_s^t (X_u)^2 \, d\langle M\rangle_u \, dP.\end{aligned}$$

Also gilt auch für $X \in \mathfrak{L}^*$

$$E((I_t(X) - I_s(X))^2 \mid \mathfrak{F}_s) = E\bigg(\int_s^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \mid \mathfrak{F}_s\bigg).$$

Wende Lemma 1 an, um $\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u$ zu erhalten. □

Definition 4. Für $X \in \mathfrak{L}^*$ heißt $(I_t(X))_{t\in I}$ das *stochastische Integral (Ito-Integral)* von X bzgl. M. Bez:

$$I_t(X) = I_t^M(X) = \int_0^t X_u \, dM_u.$$

Bemerkung 1. Unter den Voraussetzungen von Proposition 2 gilt Satz 1 mit $\mathfrak{L}$ statt $\mathfrak{L}^*$, so daß das stochastische Integral auf $\mathfrak{L}$ erklärt ist. Die in beiden Fällen gültige Beziehung (3) heißt *Ito-Isometrie.*

Bezeichne mit $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}^*(M)$ den Vektorraum der (μ_M-Äquivalenzklassen von) progressiv meßbaren Prozessen X mit

$$\forall\, t \in I: \quad \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Klar

$$\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{P}^*$$

und

$$X \text{ stetig, adaptiert} \quad \Rightarrow \quad X \in \mathfrak{P}^*.$$

[9]Aus $Z_n \to Z$ in L_p folgt $E(1_B \cdot Z_n^p) \to E(1_B \cdot Z^p)$.

Es gilt $\mathfrak{L}^*(W) \neq \mathfrak{P}^*(W)$, siehe Übung 9.1.b.
Ziel: Fortsetzung des stochastischen Integrals auf $\mathfrak{P}^*$. Methode: Lokalisation.
Im folgenden: $X \in \mathfrak{P}^*$. Für Stoppzeiten T sei

$$X_t^{(T)} = \begin{cases} X_t, & \text{falls } t \leq T \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 3. Für Stoppzeiten S, T gelte $X^{(S)}, X^{(T)} \in \mathfrak{L}^*$. Dann folgt für $t \in I$

$$I_{t \wedge S \wedge T}(X^{(T)}) = I_{t \wedge S \wedge T}(X^{(S)}).$$

Beweis. Für

$$Z = I(X^{(T)}) - I(X^{(S)}) = I(X^{(T)} - X^{(S)}) \in \mathfrak{M}_2^c$$

gilt

$$\langle Z \rangle_t = \int_0^t \left(X_u^{(T)} - X_u^{(S)} \right)^2 \, d\langle M \rangle_u$$

und somit

$$\langle Z \rangle_{S \wedge T} = 0.$$

Mit Übung 4.2 folgt

$$Z_{t \wedge S \wedge T} = 0.$$

□

Betrachte[10] Stoppzeitenfolge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad T_n \leq T_{n+1}$,

(ii) P-f.s. $\lim_{n \to \infty} T_n = \infty$,

(iii) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad X^{(T_n)} \in \mathfrak{L}^*$.

Zu $t \in I$ und $\omega \in \{\lim_{n \to \infty} T_n = \infty\}$ wähle man $n \in \mathbb{N}$ mit $T_n(\omega) \geq t$ und setze

$$I_t(X)(\omega) = I_t(X^{(T_n)})(\omega).$$

Lemma 3 sichert die Unabhängigkeit von der Wahl von n und der Stoppzeitenfolge.

Definition 5. Für $X \in \mathfrak{P}^*$ heißt $(I_t(X))_{t \in I}$ das *stochastische Integral (Ito-Integral)* von X bzgl. M. Bez. wie oben.

Bemerkung 2. Auf diese Weise: Fortsetzung des stochastischen Integrals auf $\mathfrak{P}^*$; $I(X)$ ist stetig und adaptiert mit $I_0(X) = 0$. Ferner $I_{t \wedge T_n}(X) = I_{t \wedge T_n}(X^{(T_n)})$, also

$$I_{\cdot \wedge T_n}(X) \in \mathfrak{M}_2^c.$$

Es gilt jedoch i.a. nicht $I(X) \in \mathfrak{M}_2^c$, siehe Übung 9.1.b. Siehe auch Karatzas, Shreve (1999, p. 36).

[10] Existenz: Übung 9.1.a.

Definition 6. Adaptierter Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ *lokales Martingal*, falls Stoppzeitenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (i) und (ii) existiert, so daß $X_{\cdot\wedge T_n}$ Martingal für $n \in \mathbb{N}$.

Also ist $I(X)$ für $X \in \mathfrak{P}^*$ ein lokales Martingal. Siehe Karatzas, Shreve (1999, Sec. 3.2.D) zur Integration bzgl. stetiger lokaler Martingale.

Beispiel 1. Wir bestimmen
$$\int_0^t W_u \, dW_u,$$
also $X = M = W$. Vorab: W ist progressiv meßbar, und es gilt
$$[W]_t^2 = E\left(\int_0^t W_u^2 \, du\right) = \int_0^t u \, du = \tfrac{1}{2} t^2.$$
Dies zeigt: $W \in \mathfrak{L}^*$.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}_0$ sei $t_i = t_i^{(n)} = i/2^n \cdot t$. Setze
$$W_u^{(n)} = W_{t_i}, \qquad \text{falls } u \in \,]t_i, t_{i+1}],$$
sowie $W_0^{(n)} = W_0$. Offenbar gilt $W^{(n)} \in \mathfrak{L}^*$, und $W^{(n)}$ ist von der Form (1) aber nicht einfach, da nicht beschränkt. Aus
$$\left[W - W^{(n)}\right]_{t_i}^2 = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} E(W_u - W_u^{(n)})^2 \, du = i \cdot \tfrac{1}{2}(t/2^n)^2 = \frac{i \cdot t^2}{2^{2n+1}}$$
folgt
$$\lim_{n\to\infty} \left[W - W^{(n)}\right] = 0$$
und weiter gem. Satz 1
$$\lim_{n\to\infty} \left\| I(W) - I(W^{(n)}) \right\|_t = 0.$$
Mittels Lokalisation zeigt man[11]
$$I_t(W^{(n)}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} W_{t_i} \cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(W_t^2 - \sum_{i=0}^{2^n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right). \tag{4}$$
Schließlich zeigt `Übung` 6.1
$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - t\right)^2 = 0.$$
Fazit
$$\int_0^t W_u \, dW_u = \tfrac{1}{2} W_t^2 - \tfrac{1}{2} t.$$

[11]Beachte $a(b-a) = \frac{1}{2}((b^2 - a^2) - (b-a)^2)$.

Bemerkung 3. Betrachte Zerlegungen $\pi_m = \{t_0^{(m)}, \dots, t_m^{(m)}\}$ mit

$$0 = t_0^{(m)} < \cdots < t_m^{(m)} = t, \qquad \lim_{m\to\infty} \|\pi_m\| = 0.$$

Kurz: $t_i = t_i^{(m)}$. Wähle $\lambda \in [0,1]$, setze

$$\tau_i = \tau_i^{(m)} = (1-\lambda)\cdot t_i + \lambda \cdot t_{i+1}.$$

Dann[12]

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{m-1} W_{\tau_i}\cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) - \left(\tfrac{1}{2}W_t^2 + (\lambda - \tfrac{1}{2})t\right)\right)^2 = 0.$$

Bei obiger Approximation des Ito-Integrals gem. (4): $\lambda = 0$; genau diese Wahl führt auf ein Martingal. Beim *Stratonovich Integral* wählt man $\lambda = \frac{1}{2}$; dann ergibt sich die Analogie zu

$$\int_0^t f(s)\,df(s) = \tfrac{1}{2}f^2(t)$$

für $f \in C^1([0,t])$ mit $f(0) = 0$.

Satz 2. Gelte $M, N \in \mathfrak{M}_2^c$ und $X \in \mathfrak{L}^*(M)$ sowie $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$. Dann folgt

$$\langle I^M(X), I^N(Y)\rangle_t = \int_0^t X_u \cdot Y_u\, d\langle M, N\rangle_u, \qquad t \in I.$$

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 144). Im Spezialfall $M = N$: Ito-Isometrie. □

Satz 3. Sei $M \in \mathfrak{M}_2^c$, $X \in \mathfrak{L}^*(M)$ und

$$N_t = \int_0^t X_u\, dM_u, \qquad t \in I.$$

Ferner sei $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$. Dann: $XY \in \mathfrak{L}^*(M)$ und

$$\int_0^t Y_u\, dN_u = \int_0^t X_u Y_u\, dM_u, \qquad t \in I.$$

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 145). □

2 Die Ito-Formel

Wir betrachten Prozesse X der Form

$$X_t = X_0 + M_t + B_t, \qquad t \in I, \tag{5}$$

wobei

[12] Karatzas, Shreve (1999, p. 148)

(i) X_0 $\mathfrak{F}_0$-meßbar,

(ii) $M = (M_t)_{t \in I} \in \mathfrak{M}_2^c$,

(iii) $B = (B_t)_{t \in I}$ adaptiert, stetig mit $B_0 = 0$ und von beschränkter Variation auf jedem kompakten Intervall.

Bemerkung 4. Prozesse der Form (5) sind spezielle stetige *Semimartingale*.[13] Obige Zerlegung ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit, siehe Übung 9.2. In zeitkontinuierlichen Finanzmärkten werden Preisprozesse in der Regel als Semimartingale modelliert.

Beispiel 2. Mit $N \in \mathfrak{M}_2^c$, $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$, Z progressiv meßbar und lokal Lebesgue-integrierbar:

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_u \, dN_u + \int_0^t Z_u \, du.$$

Bez.: *Ito-Prozeß.*

Satz 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei X von der Form (5). Dann folgt

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u) \, dM_u + \int_0^t f'(X_u) \, dB_u + \tfrac{1}{2} \int_0^t f''(X_u) \, d\langle M \rangle_u, \qquad t \in I.$$

Beweisskizze. Vorab: Für $k = 1, 2$ sind die Prozesse $f^{(k)} \circ X$ stetig und progressiv meßbar. Die Lebesgue-Stieltjes Integrale bzgl. dB_u und $d\langle M \rangle_u$ sind pfadweise wohldefiniert.

Betrachte Zerlegung $0 = t_0 < \cdots < t_m = t$ von $[0, t]$. Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^m f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}}) \cdot (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^m f''(\eta_k) \cdot (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2, \end{aligned}$$

wobei $\eta_k(\omega)$ zwischen $X_{t_{k-1}}(\omega)$ und $X_{t_k}(\omega)$. Unter geeigneten Beschränktheitsvoraussetzungen konvergiert die erste Summe im Quadratmittel gegen

$$\int_0^t f'(X_u) \, dM_u + \int_0^t f'(X_u) \, dB_u$$

und die zweite Summe gegen

$$\int_0^t f''(X_u) \, d\langle M \rangle_u.$$

[13] Allgemeiner: stetige *lokale Martingale* M. Bzgl. Semimartingalen kann man sinnvoll das stochastische Integral erklären.

Letzteres ist plausibel, da B glatter als M ist. Etwas genauer: für jede Zerlegung π wie oben gilt

$$V_t^{(2)}(B;\pi) \le \sup_{k=1,\dots,m} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \cdot V_t^{(1)}(B;\pi) \le \left(V_t^{(1)}(B;\pi)\right)^2.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\forall\, \omega \in \Omega \;\; \exists\, K > 0 : \quad \sup_\pi V_t^{(1)}(B;\pi)(\omega) \le K.$$

Wir nehmen an, daß

$$\exists\, K > 0 : \quad \sup_{\omega\in\Omega} \sup_\pi V_t^{(1)}(B;\pi)(\omega) \le K.$$

Dann sichert der Lebesguesche Grenzwertsatz

$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_t^{(2)}(B;\pi_n)\right)^2 = 0$$

für alle Folgen von Partitionen mit $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$. Im allgemeinen Fall: Lokalisation. Details bei Karatzas, Shreve (1999, p. 149–153). □

Beispiel 3. Wähle $f(x) = x^2$, $X = M = W$ und $B = 0$. Dann[14]

$$W_t^2 = \int_0^t 2\, W_u\, dW_u + t.$$

Bemerkung 5. Man verwendet oft die symbolische Kurzschreibweise

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)\, dM_t + f'(X_t)\, dB_t + \tfrac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle M\rangle_t \\ &= f'(X_t)\, dX_t + \tfrac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle M\rangle_t \end{aligned}$$

für die Formel aus Satz 4. Zum Vergleich die Kettenregel der klassischen Differentialrechnung:

$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t.$$

Man schreibt kurz $\int Y\, dX$ für $\int Y\, dB + \int Y\, dM$.

Satz 4 enthält die Grundversion der *Ito-Formel*. Allgemeinere Varianten, deren Beweise ähnlich wie der oben skizzierte verlaufen, lauten wie folgt.

Satz 5. Sei $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen

$$f_t = f^{(1,0)}, \quad f_x = f^{(0,1)}, \quad f_{xx} = f^{(0,2)}$$

und sei X von der Form (5). Dann folgt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = &f(0, X_0) + \int_0^t f_t(u, X_u)\, du + \int_0^t f_x(u, X_u)\, dM_u + \int_0^t f_x(u, X_u)\, dB_u \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(u, X_u)\, d\langle M\rangle_u, \qquad\qquad t \in I. \end{aligned}$$

[14] Die Berechnung von $\int_0^t W_u\, dW_u$ ist jetzt ein Einzeiler, vgl. Bsp. 1

Nun zur Ito-Formel für $\mathbb{R}^d$-wertige Prozesse X, die komponentenweise von der Form (5) sind. Betrachte Abbildungen $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen

$$f^{(1,0)} \text{ mit } 0 \in \mathbb{N}_0^d, \qquad f^{(0,\alpha)} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ und } |\alpha| \le 2.$$

Die Bezeichnungen f_t, f_{x_i} und $f_{x_i x_j}$ sind kanonisch. Gelte

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + M_t^{(i)} + B_t^{(i)}, \qquad t \in I,\ i \in \{1, \dots, d\},$$

so daß $X_0^{(i)}$ $\mathfrak{F}_0$-meßbar, $M^{(i)} \in \mathfrak{M}_2^c$, $B^{(i)}$ stetig, adaptiert mit beschränkter Variation auf beliebigen kompakten Intervallen und $B_0^{(i)} = 0$.

Satz 6. Unter obigen Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) =& f(0, X_0) + \int_0^t f_t(u, X_u)\, du \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(u, X_u)\, dM_u^{(i)} + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(u, X_u)\, dB_u^{(i)} \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t f_{x_i x_j}(u, X_u)\, d\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_u, \qquad t \in I. \end{aligned}$$

Satz 7 (partielle Integration)**.**

$$X_t^{(1)} \cdot X_t^{(2)} = X_0^{(1)} \cdot X_0^{(2)} + \int_0^t X_s^{(1)}\, dX_s^{(2)} + \int_0^t X_s^{(2)}\, dX_s^{(1)} + \langle M^{(1)}, M^{(2)} \rangle_t, \qquad t \in I.$$

Beweis. Ito-Formel mit $f(t, x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. □

3 Die geometrische Brownsche Bewegung

Literatur:

Irle (1999, Kap. 8),
Bingham, Kiesl (1998, Chap. 4.6).

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma, s_0 > 0$ definieren wir $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t, x) = s_0 \cdot \exp(\alpha\, t + \sigma\, x).$$

Sei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0. Setze $S_t = f(t, W_t)$, also

$$S_t = s_0 \cdot \exp(\alpha\, t + \sigma\, W_t), \qquad t \in I.$$

Übung 6.2 behandelt den Spezialfall $\alpha = 0$ und $\sigma = 1$.

Definition 7. Der oben definierte Prozeß $S = (S_t)_{t \in I}$ heißt *geometrische Brownsche Bewegung* mit *Startwert* s_0 und *Volatilität* σ.

Fortan: S geometrische Brownsche Bewegung.

Anwendung der Ito-Formel für $X = M = W$ und $B = 0$:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + \alpha \cdot \int_0^t S_u \, du + \sigma \cdot \int_0^t S_u \, dW_u + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot \int_0^t S_u \, du \\ &= S_0 + \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot \int_0^t S_u \, du + \sigma \cdot \int_0^t S_u \, dW_u. \end{aligned} \tag{6}$$

Also löst S die stochastische Integralgleichung (6).

Bemerkung 6. *Black-Scholes-Modell:* ein zeitkontinuierliches Finanzmarktmodell mit zwei Basisgütern[15]

(i) eine festverzinsliche Anlage („bond“) mit kontinuierlicher Verzinsung bei fester Zinsrate $\rho > 0$,[16]

(ii) eine „Aktie“, deren Preisprozeß eine geometrische Brownsche Bewegung ist.

Lemma 4.

$$S \text{ Martingal} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\tfrac{1}{2}\sigma^2.$$

Beweis. Klar: $S \in \mathfrak{L}^*$, so daß $I(S)$ gem. Satz 1 ein Martingal ist. Beachte, daß $\int_0^t S_u \, du$ einen stetigen, wachsenden, strikt positiven Prozeß definiert, der somit kein Martingal ist. □

Definition 8. *Drift* der geometrischen Brownschen Bewegung S:

$$\mu = \alpha + \tfrac{1}{2}\sigma^2.$$

Lemma 5. Für $t \in I$ gilt

$$E(S_t) = s_0 \cdot \exp(\mu \, t), \qquad \mathrm{Var}(S_t) = s_0^2 \cdot \exp(2\mu \, t) \cdot \left(\exp(\sigma^2 \, t) - 1\right).$$

Beweis. Mit Satz 1 oder elementar. □

Lemma 6. Die relativen Inkremente $(S_t - S_s)/S_s$, $0 \leq s < t$, sind unabhängig von $\mathfrak{F}_s$ und stationär. Die *returns* S_t/S_s sind lognormalverteilt.

Beweis. Verwende $(S_t - S_s)/S_s = \exp(\alpha \, (t - s) + \sigma \, (W_t - W_s)) - 1$. □

Das Donskersche Invarianzprinzip läßt sich auf die geometrische Brownsche Bewegung übertragen. Wir verwenden die Bezeichnungen und Annahmen aus Abschnitt II.2.3. Hier nur der Martingal-Fall mit $s_0 = 1$. Definiere $H : C(I) \to C(I)$ durch

$$(Hf)(t) = \exp(-\tfrac{1}{2} \, \sigma^2 t + \sigma \, f(t)).$$

Dann konvergiert HP_n schwach gegen HP_*; Beweis Übung 10.4. Klar: HP_* ist die Verteilung der geometrischen Brownschen Bewegung mit Startwert 1, Drift 0 und Volatilität σ, und HP_n ist die Verteilung von $S^{(n)} = HX^{(n)}$.

---

[15] Siehe Beispiel I.2.

[16] Also Preisverlauf $t \mapsto c \cdot \exp(\rho \, t)$; OBdA $c = 1$.

Es gilt

$$S_t^{(n)}(\omega) = \exp(-\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 t + \sigma\, X_t^{(n)}(\omega))$$

und für $t \in [k/n, (k+1)/n]$ mit $k \in \mathbb{N}_0$

$$-\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 t + \sigma\, X_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}}(\xi_j - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2/\sqrt{n}) + (t\sqrt{n} - k/\sqrt{n}) \cdot (\xi_{k+1} - \tfrac{1}{2}\sigma^2/\sqrt{n}).$$

Somit

$$S_t^{(n)} = \prod_{j=1}^{k} \underbrace{\exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\xi_j - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2/\sqrt{n}\right)\right)}_{Y_j^{(n)}} \cdot \left(Y_{k+1}^{(n)}\right)^{t\,n-k}.$$

Klar: für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots$ iid.
Spezialfall: ξ_j zweipunktverteilt. Dann ist $S_{k/n}^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, der Aktienpreisprozeß in einem Cox-Ross-Rubinstein-Modell, siehe Beispiel I.7. Im Falle $P(\{\xi_j = \pm\sigma\}) = \frac{1}{2}$ nimmt $Y_j^{(n)}$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ die Werte

$$\exp(\pm\sigma/\sqrt{n}) \cdot \exp(-\tfrac{1}{2}\,\sigma^2/n)$$

an.

Kapitel IV

Stochastische Differentialgleichungen

Literatur:

> Karatzas, Shreve (1999, Chap. 5),
> Rogers, Williams (2000, Chap. V),
> Arnold (1973, Kap. 6–10),
> Friedman (1975).

Die Integralgleichung (III.6) für die geometrische Brownsche Bewegung wird symbolisch in Differentialform

$$dS_t = \mu \cdot S_t \, dt + \sigma \cdot S_t \, dW_t, \qquad S_0 = s_0,$$

geschrieben. Man verwendet allgemein stochastische Differentialgleichungen zur Definition von Diffusionsprozessen, insbesondere von Preisprozessen in zeit-kontinuierlichen Finanzmarktmodellen. Im folgenden: $I = [0, \infty[$.

1 Lösungsbegriffe, Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben: Borel-meßbare Abbildungen

$$\mu = (\mu_i)_{i=1,\dots,d} : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

und

$$\sigma = (\sigma_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,d,\\ j=1,\dots,r}} : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times r},$$

wobei $d, r \in \mathbb{N}$, sowie[1]

(a) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und darauf

(b) r-dimensionale Brownsche Bewegung W bzgl. $\mathfrak{F}^W$ mit Startpunkt 0,

[1]Existenz für jede vorgegebene Verteilung von ξ: Produktraum.

(c) $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor ξ, unabhängig von $\mathfrak{F}_\infty^W$.

Für $t \in I$ sei

$$\mathfrak{G}_t = \sigma(\{\xi\} \cup \{W_s : 0 \leq s \leq t\}),$$

$\mathfrak{N}$ das System der Nullmengen bzgl. $(\Omega, \mathfrak{G}_\infty, P)$ und

$$\mathfrak{F}_t = \sigma(\mathfrak{G}_t \cup \mathfrak{N}).$$

Wir betrachten im folgenden den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ und halten fest: die Filtration $\mathfrak{F}$ erfüllt die üblichen Voraussetzungen, und W ist auch bzgl. $\mathfrak{F}$ eine Brownsche Bewegung. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 285) und vgl. Abschnitt II.3.4.

Definition 1. $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ heißt *starke Lösung* der *stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t \tag{1}$$

mit *Anfangsbedingung*

$$X_0 = \xi \tag{2}$$

(basierend auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, W und ξ), falls

(i) X adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(ii) X besitzt stetige Pfade,

(iii) für alle $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, r$ und $t \in I$ gilt P-f.s.

$$\int_0^t \left(|\mu_i(s, X_s)| + \sigma_{i,j}^2(s, X_s)\right) ds < \infty,$$

(iv) für alle $i = 1, \dots, d$ und $t \in I$ gilt[2]

$$X_t^{(i)} = \xi^{(i)} + \int_0^t \mu_i(s, X_s)\, ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\, dW_s^{(j)}.$$

Man bezeichnet[3] μ als *Driftkoeffizienten*, und σ als *Diffusionskoeffizienten* der Gleichung (1).

Beispiel 1. Betrachte die *Langevin-Gleichung*

$$dX_t = \mu \cdot X_t\, dt + \sigma\, dW_t \tag{3}$$

mit Startwert $x \in \mathbb{R}$. Hier: $r = d = 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Setze

$$X_t^{(1)} = \exp(\mu\, t) = 1 + \underbrace{\exp(\mu\, t) - 1}_{=B_t^{(1)}}, \qquad M_t^{(1)} = 0,$$

[2]Kurz: vektorwertig $X_t = \xi + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$.
[3]Bezeichnung nicht einheitlich.

und

$$X_t^{(2)} = x + \underbrace{\sigma \int_0^t \exp(-\mu\, s)\, dW_s}_{=M_t^{(2)}}, \qquad B_t^{(2)} = 0.$$

Partielle Integration (Satz III.7) liefert

$$X_t^{(1)} \cdot X_t^{(2)} = x + \int_0^t X_s^{(2)}\, dB_s^{(1)} + \int_0^t X_s^{(1)}\, dM_s^{(2)}.$$

Es gilt

$$\int_0^t X_s^{(2)}\, dB_s^{(1)} = \int_0^t X_s^{(2)} \cdot \mu \exp(\mu\, s)\, ds = \mu \int_0^t X_s^{(2)} \cdot X_s^{(1)}\, ds,$$

und Satz III.3 zeigt[4]

$$\int_0^t X_s^{(1)}\, dM_s^{(2)} = \int_0^t X_s^{(1)} \cdot \sigma \exp(-\mu\, s)\, dW_s = \sigma\, W_t.$$

Fazit: $X = X^{(1)} \cdot X^{(2)}$ löst die Integralgleichung

$$X_t = x + \mu \int_0^t X_s\, ds + \sigma \int_0^t dW_s.$$

Offenbar ist Y eine starke Lösung von (3) mit Startwert x. Der Prozeß X heißt *Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß*.

Definition 2. Für μ und σ gilt[5] die *starke Eindeutigkeit*, falls für jede Wahl von (a)–(c) und alle hierauf basierende starke Lösungen X und $\widetilde{X}$ von (1), (2) gilt

$$X \text{ und } \widetilde{X} \text{ sind ununterscheidbar.}$$

Beispiel 2. Die Lösung der Langevin-Gleichung ist stark eindeutig bestimmt[6]. Betrachte nämlich zwei starke Lösungen X und $\widetilde{X}$, gemeinsam basierend auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, W und ξ und setze $\Delta = X - \widetilde{X}$. Offenbar besitzt Δ P-f.s. stetig differenzierbare Pfade. Es gilt für P-f.a. $\omega \in \Omega$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\Delta_t(\omega) = \mu \cdot \Delta_t(\omega)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Delta_0(\omega) = 0.$$

Es folgt $\Delta = 0$ P-f.s.

Lemma 1 (Gronwall)**.** Für $\alpha, g : [0,T] \to \mathbb{R}$ gelte: α integrierbar, g stetig und

$$\forall\, t \in [0,T] : \quad g(t) \le \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)\, ds$$

mit einer Konstanten $\beta \ge 0$. Dann

$$\forall\, t \in [0,T] : \quad g(t) \le \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) \cdot \exp(\beta\,(t-s))\, ds.$$

---

[4] Alternative: Verwende Übung 9.4 und die Definition des stochastischen Integrals.

[5] Man spricht auch von starker Eindeutigkeit der Lösung von (1).

[6] Genauer: für $(t,x) \mapsto \mu\, x$ und $(t,x) \mapsto \sigma$ gilt die starke Eindeutigkeit.

Beweis. Für $h(t) = \exp(-\beta\, t) \int_0^t g(s)\, ds$ gilt

$$h'(t) = \exp(-\beta\, t) \cdot \left(g(t) - \beta \int_0^t g(s)\, ds \right) \leq \exp(-\beta\, t) \cdot \alpha(t).$$

Also

$$h(t) = \int_0^t h'(s)\, ds \leq \int_0^t \exp(-\beta\, s) \cdot \alpha(s)\, ds$$

und somit

$$\int_0^t g(s)\, ds \leq \int_0^t \alpha(s) \cdot \exp(\beta\,(t-s))\, ds.$$

□

Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ beliebige Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen V.

Definition 3. *Lokale Lipschitzbedingung (bzgl. der Zustandsvariable)* für Abbildung $f : I \times \mathbb{R}^d \to V$

$$\begin{aligned} &\forall\, c > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall\, t \in I, x, y \in \mathbb{R}^d : \\ &\quad \max(\|x\|, \|y\|) \leq c \quad \Rightarrow \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Satz 1.

$$\text{Lokale Lipschitzbed. für } \mu \text{ und } \sigma \quad \Rightarrow \quad \text{starke Eindeutigkeit für } \mu \text{ und } \sigma.$$

Beweis. Hier: $r = d = 1$. Der allgemeine Fall: Übung.
In einer Situation (a)–(c) seien $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ starke Lösungen von (1), (2). Betrachte die Stoppzeiten

$$S_n = \inf\{t \in I : \max(|X_t^{(1)}|, |X_t^{(2)}|) \geq n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

siehe Proposition I.5.(ii), sowie die durch

$$g_n(t) = E\left|X_{t\wedge S_n}^{(1)} - X_{t\wedge S_n}^{(2)}\right|^2, \qquad t \in I,$$

definierten stetigen Funktionen.
Setze

$$z = t \wedge S_n, \quad \delta_u = \mu(u, X_u^{(1)}) - \mu(u, X_u^{(2)}), \quad \Delta_u = \sigma(u, X_u^{(1)}) - \sigma(u, X_u^{(2)}).$$

Dann

$$X_z^{(1)} - X_z^{(2)} = \int_0^z \delta_u\, du + \int_0^z \Delta_u\, dW_u$$

und

$$\left|X_z^{(1)} - X_z^{(2)}\right|^2 \leq 2 \cdot \left|\int_0^z \delta_u\, du\right|^2 + 2 \cdot \left|\int_0^z \Delta_u\, dW_u\right|^2.$$

Weiter

$$\left|\int_0^z \delta_u\, du\right|^2 \leq \left(\int_0^z |\delta_u|\, du\right)^2 \leq z \cdot \int_0^z |\delta_u|^2\, du \leq K_1\, t \cdot \int_0^t \left|X_{u\wedge S_n}^{(1)} - X_{u\wedge S_n}^{(2)}\right|^2\, du$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten $K_1 \geq 0$. Es gilt

$$I_{t \wedge S_n}(\Delta) = I_t(\widetilde{\Delta}) \qquad \text{für} \qquad \widetilde{\Delta}_u(\omega) = \Delta_u(\omega) \cdot 1_{\{u \leq S_n(\omega)\}},$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, (3.2.24) und p. 147) und vgl. Lemma III.3. Deshalb liefert die Ito-Isometrie

$$E \left| \int_0^z \Delta_u \, dW_u \right|^2 = E \left(\int_0^t \widetilde{\Delta}_u^2 \, du \right) = E \left(\int_0^z \Delta_u^2 \, du \right).$$

Schließlich

$$\int_0^z \Delta_u^2 \, du \leq K_2 \cdot \int_0^z \left| X_u^{(1)} - X_u^{(2)} \right|^2 du \leq K_2 \cdot \int_0^t \left| X_{u \wedge S_n}^{(1)} - X_{u \wedge S_n}^{(2)} \right|^2 du$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten $K_2 \geq 0$. Zusammenfassend: mit $K = \max(K_1, K_2)$ erhält man

$$g_n(t) \leq 2\, K \cdot (1+t) \cdot \int_0^t g_n(u) \, du.$$

Gronwalls Lemma liefert $g_n = 0$, d.h. $X_{t \wedge S_n}^{(1)}$ Modifikation von $X_{t \wedge S_n}^{(2)}$.
Da $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$, folgt aus

$$P\left(\left\{ X_t^{(1)} = X_t^{(2)} \right\} \right) \geq P\left(\left\{ X_{t \wedge S_n}^{(1)} = X_{t \wedge S_n}^{(2)} \right\} \cap \{S_n \geq t\} \right) = P\left(\{S_n \geq t\}\right),$$

daß $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ ununterscheidbar sind. □

Beispiel 3. Starke Eindeutigkeit für die Gleichungen

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu \cdot X_t \, dt + \sigma \, dW_t, \\ dX_t &= \mu \cdot X_t \, dt + \sigma \cdot X_t \, dW_t. \end{aligned}$$

Definition 4. $f : I \times \mathbb{R}^d \to V$ erfüllt eine

(i) *globale Lipschitzbedingung (bzgl. der Zustandsvariable)*, falls

$$\exists\, K > 0 \ \ \forall\, t \in I,\ x, y \in \mathbb{R}^d : \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K \cdot \|x - y\|,$$

(ii) *lineare Wachstumsbedingung (bzgl. der Zustandsvariable)*, falls

$$\exists\, K > 0 \ \ \forall\, t \in I,\ x \in \mathbb{R}^d : \quad \|f(t,x)\|^2 \leq K \cdot (1 + \|x\|^2).$$

Satz 2. In jeder Situation (a)–(c) gilt

$E\|\xi\|^2 < \infty \ \wedge$ globale Lipschitz- und lineare Wachstumsbedingung für μ und σ
$\Rightarrow$ Existenz einer starken Lsg. von (1), (2).

Ferner existiert für alle $T > 0$ eine Konstante C, die nur von T und den Lipschitz- und Wachstumskonstanten von μ und σ abhängt, so daß

$$\forall\, t \in [0,T] : \quad E\|X_t\|^2 \leq C \cdot (1 + E\|\xi\|^2) \cdot \exp(C\, t). \tag{4}$$

Beweis. Hier: $r = d = 1$.
Picard-Lindelöf-Iteration: setze $X^{(0)} = \xi$ und für $k \in \mathbb{N}_0$

$$X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t \mu(s, X_s^{(k)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})\, dW_s, \quad t \in I.$$

Man zeigt induktiv unter Verwendung der linearen Wachstumsbedingung: $X^{(k)}$ ist wohldefiniert, stetig und erfüllt $X^{(k)} \in \mathfrak{L}^*$ sowie für $T > 0$

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, t \in [0,T]: \quad E\big|X_t^{(k)}\big|^2 \leq C \cdot (1 + E|\xi|^2) \cdot \exp(C\, t). \tag{5}$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 388).
Beh:

$$P\text{-f.s. konvergiert } (X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \text{ gleichmäßig auf jedem Kompaktum.} \tag{6}$$

Betrachte

$$B_t^{(k)} = \int_0^t \left(\mu(s, X_s^{(k)}) - \mu(s, X_s^{(k-1)})\right)\, ds$$

und

$$M_t^{(k)} = \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})\right)\, dW_s.$$

Klar: $M^{(k)} \in \mathfrak{M}_2^c$.
Wir verwenden eine Momentenungleichung für Martingale, siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 166): für $p > 0$ existieren Konstanten $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0$, so daß für jedes $M \in \mathfrak{M}_2^c$ gilt[7]

$$\forall\, t \in I: \quad \Lambda_1 \cdot E(\langle M\rangle_t^p) \leq E\left(\max_{0\leq s\leq t} |M_s|^{2p}\right) \leq \Lambda_2 \cdot E(\langle M\rangle_t^p).$$

Zusammen mit Satz III.1 und der Lipschitz-Bedingung zeigt dies

$$\begin{aligned} E\left(\max_{0\leq s\leq t} \left(M_s^{(k)}\right)^2\right) &\leq \Lambda_2 \cdot E\left(\int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})\right)^2\, ds\right) \\ &\leq \Lambda_2\, K_1 \cdot E\left(\int_0^t \left(X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\right)^2\, ds\right). \end{aligned}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned} \left(B_t^{(k)}\right)^2 &\leq t \cdot \int_0^t \left(\mu(s, X_s^{(k)}) - \mu(s, X_s^{(k-1)})\right)^2\, ds \\ &\leq K_2\, t \cdot \int_0^t \left(X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\right)^2\, ds. \end{aligned}$$

Fixiere $T > 0$, setze $L = 2\max(K_1, K_2)\,(\Lambda_2 + T)$. Dann gilt für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} E\left(\max_{0\leq s\leq t} \left(X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\right)^2\right) &\leq 2\,E\left(\max_{0\leq s\leq t} \left(M_s^{(k)}\right)^2\right) + 2\,E\left(\max_{0\leq s\leq t} \left(B_s^{(k)}\right)^2\right) \\ &\leq L \cdot E\left(\int_0^t \left(X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\right)^2\, ds\right). \end{aligned}$$

[7] Allgemeiner für Stoppzeiten.

Für

$$C^* = \max_{0 \le t \le T} E\left(X_t^{(1)} - \xi\right)^2$$

gilt $C^* < \infty$ wg. (5) und $E(\xi^2) < \infty$. Induktiv folgt

$$E\left(\max_{0 \le s \le t} \left(X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\right)^2\right) \le C^* \, \frac{(L\,t)^k}{k!}, \tag{7}$$

und dies ergibt

$$P\left(\left\{\max_{0 \le s \le T} \left|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\right| > 1/2^{k+1}\right\}\right) \le 4\,C^* \cdot \frac{(4\,L\,T)^k}{k!}.$$

Das Borel-Cantelli-Lemma sichert die Existenz von $\Omega^* \in \mathfrak{F}_\infty$ und $N : \Omega \to \mathbb{N}$ meßbar mit $P(\Omega^*) = 1$ und

$$\forall\ \omega \in \Omega^* \ \ \forall\ n \ge N(\omega) : \quad \max_{0 \le s \le T} \left|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\right| \le 1/2^{k+1}.$$

Hiermit folgt die Konvergenz (6).

Mit $X(\omega)$ bezeichnen wir den stetigen Grenzwert in Fall $\omega \in \Omega^*$, andernfalls sei $X(\omega) = 0$. Dies ist die gesuchte Lösung.

Genauer: Wir verifizieren die Forderungen aus Definition 1.

ad (i): $1_{\Omega^*} X^{(k)}$ definiert eine Modifikation von $X^{(k)}$, die wiederum adaptiert ist[8] und punktweise gegen X konvergiert. Also ist X adaptiert.

ad (ii) : klar.

ad (iii) : Zunächst erhält man (4) mittels (5) und dem Fatouschen Lemma. Die lineare Wachstumsbedingung liefert (iii).

ad (iv): Die Lipschitz-Bedingung liefert für jedes $t \in I$

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^t \mu(s, X_s^{(k)})\, ds = \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds \qquad P\text{-f.s.} \tag{8}$$

Da $\left(X_t^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ gemäß (7) eine Cauchy-Folge in $L_2(P)$ ist, folgt

$$\lim_{k \to \infty} E\left(X_t^{(k)} - X_t\right)^2 = 0.$$

Zusammen mit (5) und dem Fatouschen Lemma ergibt sich

$$\sup_{0 \le s \le t} E(X_s^2) \le \sup_{0 \le s \le t} \liminf_{k \to \infty} E\left(\left(X_s^{(k)}\right)^2\right) \le \sup_{0 \le s \le t} \sup_{k \in \mathbb{N}} E\left(\left(X_t^{(k)}\right)^2\right) < \infty.$$

Aufgrund der Ito-Isometrie und der Lipschitzbedingung gilt

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s)\right)\, dW_s\right)^2 &= E\left(\int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s)\right)^2\, ds\right) \\ &\le K \cdot \int_0^t E\left(X_s^{(k)} - X_s\right)^2\, ds. \end{aligned}$$

[8] Hier gehen die üblichen Voraussetzungen ein.

Man erhält

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s)\right) dW_s\right)^2 = 0. \tag{9}$$

Kombiniere (8) und (9), um (iv) zu erhalten. □

Beispiel 4. Sei X eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Die zugrundeliegende Filtration $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_t)_{t\in I}$ erfülle die üblichen Voraussetzungen. Definiere

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}.$$

sowie

$$W_t = \int_0^t \sigma(X_s)\, dX_s, \qquad t \in I.$$

Es gilt $W \in \mathfrak{M}_2^c$ mit

$$\langle W\rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X_s)\, d\langle X\rangle_s = t.$$

Nach der Lévyschen Charakterisierung der Brownschen Bewegung, siehe Übung 10.1, ist W bezüglich $\mathfrak{G}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0.

Satz III.3 zeigt

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s)\, \sigma(X_s)\, dX_s = \int_0^t \sigma(X_s)\, dW_s.$$

Also „löst“ X die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dW_t, \qquad X_0 = 0. \tag{10}$$

Genauer: konstruiere zu W und $\xi = 0$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ die Filtration $\mathfrak{F}$ wie anfangs dieses Abschnittes beschrieben. Dann

$$\begin{aligned} & X \text{ starke Lösung von (10) basierend auf } (\Omega, \mathfrak{A}, P),\ W \text{ und } \xi \\ \Leftrightarrow\ & X \text{ an } \mathfrak{F} \text{ adaptiert.} \end{aligned}$$

Wir wissen jedoch nur $\mathfrak{F}_t^W \subset \mathfrak{G}_t$ und somit $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{G}_t$, sowie $\mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{G}_t$.

Es gilt in jeder Situation (a)–(c), daß (10) keine starke Lösung besitzt.

Annahme: beliebiger Prozeß X sei starke Lösung von (10). Die Lévysche Charakterisierung zeigt, daß X Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}$ ist, und es gilt[9]

$$W_t = \int_0^t \sigma(X_s)\, dX_s = |X_t| - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\,\varepsilon} \lambda\{s \in [0,t] : |X_s| \leq \varepsilon\} \qquad P\text{-f.s.},$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 205). Also

$$\mathfrak{F}_t^W \subset \mathfrak{F}_t^{|X|},$$

und deshalb

$$\mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{F}_t \subset \sigma(\mathfrak{F}_t^{|X|} \cup \mathfrak{N}),$$

wobei $\mathfrak{N}$ die Menge der Nullmengen in $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ bezeichnet. Also ist X nicht starke Lösung von (10).

[9] Lokalzeit der Brownschen Bewegung in 0.

Definition 5. Ein Tripel $((\Omega, \mathfrak{A}, P),\ \mathfrak{F},\ (W, X))$ heißt *schwache Lösung* einer stochastischen Differentialgleichung mit Driftkoeffizient μ und Diffusionskoeffizient σ, falls

(i) $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ Filtration in $\mathfrak{A}$, die den üblichen Voraussetzungen genügt,

(ii) W Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}$,

(iii) Forderungen (i)–(iv) aus Definition 1 sind erfüllt mit $\xi = X_0$.

Bemerkung 1. Schwache Lösung in Beispiel 4: $((\Omega, \mathfrak{A}, P),\ (\mathfrak{G}_t)_{t \in I},\ (W, X))$.

Gegeben: $(\Omega^\ell, \mathfrak{A}^\ell, P^\ell)$, W^ℓ, und ξ^ℓ mit den Eigenschaften (a)–(c) für $\ell = 1, 2$. Betrachte die Verteilungen $P^\ell_{X^\ell}$ von starken Lösungen X^ℓ auf $(C(I)^d, (\mathfrak{B}(C(I)))^d)$.

Satz 3.

$$\begin{array}{ll} P^1_{\xi^1} = P^2_{\xi^2} \ \wedge\ E^1\|\xi^1\|^2 < \infty \ \wedge\ \text{glob. Lipschitz- und lin. W'tumsbed. für } \mu \text{ und } \sigma \\ \Rightarrow \qquad\qquad\qquad P^1_{X^1} = P^2_{X^2}. \end{array}$$

Beweisskizze. Für die Approximationen $X^{\ell,n}$ nach Picard-Lindelöf zeigt man induktiv: $P^1_{(W^1, X^{1,n})} = P^2_{(W^2, X^{2,n})}$. Klar: $P^\ell_{X^{\ell,n}}$ konvergiert schwach gegen $P^\ell_{X^\ell}$. Verwende Proposition II.6. □

Siehe Karatzas, Shreve (1999, Sec. 5.3, 5.4) zur Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen.

2 Starke Lösungen als Diffusionsprozesse

Gegeben: $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, W und ξ gem. (a)–(c) sowie Drift- und Diffusionskoeffizienten μ und σ. Erfüllt seien die globale Lipschitz- und die lineare Wachstumsbedingung für μ und σ sowie $E\|\xi\|^2 < \infty$.
Im folgenden: $0 \le s < t$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Setze

$$\mathfrak{F}^s_t = \sigma\big(\sigma(\{W_v - W_u : s \le u < v \le t\}) \cup \{A \in \mathfrak{F}_\infty : P(A) = 0\}\big).$$

Betrachte die starken Lösungen von

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \qquad t \ge 0, \\ X_0 &= \xi \end{aligned} \tag{11}$$

und[10]

$$\begin{aligned} dX^{s,x}_t &= \mu(t, X^{s,x}_t)\, dt + \sigma(t, X^{s,x}_t)\, dW_t, \qquad t \ge s, \\ X^{s,x}_s &= x. \end{aligned} \tag{12}$$

[10] Rückführung auf (1), (2) durch $\mu(t, y) = 0$ und $\sigma(t, y) = 0$ für $t < s$ sowie $\xi = x$.

Beispiel 5. Für $r = d$, $\mu = 0$ und $\sigma = \mathrm{Id}_d$ gilt

$$X_t^{s,x} = x + W_t - W_s, \qquad t \geq s.$$

Wir zeigen zunächst, daß X ein Markov-Prozeß ist und bedingte Erwartungen bzgl. X gegeben $X_s = x$ Erwartungen bzgl. $X^{s,x}$ sind.

Lemma 2. $\mathfrak{F}_s$, $\mathfrak{F}_t^s$ sind unabhängig.

Beweis. Klar. □

Lemma 3. Für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$X_t^{s,X_s(\omega)}(\omega) = X_t(\omega).$$

Beweis. Folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung von (11). □

Lemma 4. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^d, \qquad (x, \omega) \mapsto X_t^{s,x}(\omega)$$

ist $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{F}_t^s)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$-meßbar.

Beweis. Siehe Elliott (1982, Lemma 14.14). □

Definition 6. Die *Übergangswahrscheinlichkeiten* zu (11) sind definiert durch

$$p(s, x, t, A) = P(\{X_t^{s,x} \in A\}), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d).$$

Lemma 5. $p(s, \cdot, t, \cdot)$ ist ein Markov-Kern auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

Beweis. Folgt mit Lemma 4. □

Lemma 6. Sei

$$f : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$$

beschränkt und $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{F}_t^s)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar, und sei

$$Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

$\mathfrak{F}_s$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ meßbar. Dann gilt

$$E(f(Y(\cdot), \cdot) \,|\, \mathfrak{F}_s) = g \circ Y,$$

wobei

$$g(y) = \int_\Omega f(y, \omega) \, dP(\omega).$$

Beweis. Algebraische Induktion, Dynkin-System. Verwende Lemma 2. □

Satz 4. $(X_t)_{t \in I}$ ist ein Markov-Prozeß bzgl. $\mathfrak{F}$, und es gilt

$$P(\{X_t \in A\} \,|\, \mathfrak{F}_s) = p(s, X_s, t, A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d).$$

Beweis. Für

$$f(x, \omega) = 1_A(X_t^{s,x}(\omega)), \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ \omega \in A,$$

und $Y = X_s$ sind wegen Lemma 4 die Annahmen von Lemma 6 erfüllt. Für die entsprechende Funktion g ergibt sich

$$g(x) = \int_\Omega 1_A(X_t^{s,x}(\omega))\, dP(\omega) = P(\{X_t^{s,x} \in A\}) = p(s, x, t, A),$$

und Lemma 3 sichert

$$f(Y(\omega), \omega) = 1_A(X_t(\omega)).$$

Fazit

$$P(\{X_t \in A\} \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(f(Y(\cdot), \cdot) \,|\, \mathfrak{F}_s) = p(s, X_s, t, A).$$

$\square$

Beispiel 6. In der Situation von Beispiel 5 gilt für $s < t$

$$p(s, x, t, A) = (2\pi\,(t-s))^{-d/2} \int_A \exp\left(-\tfrac{|u-x|^2}{2\,(t-s)}\right)\, du,$$

wobei $|\cdot|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Siehe `Übung` 6.2 für den Fall $r = d = 1$, $\mu(t, x) = x/2$ und $\sigma(t, x) = x$.

Bemerkung 2. Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F}$ und $\mathbb{R}^d$-wertigem Markov-Prozeß Y bzgl. $\mathfrak{F}$. Dann existieren Markov-Kerne $p(s, \cdot, t, \cdot)$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$, so daß für P_{Y_s}-fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\forall\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d): \quad P(\{Y_t \in A\} \,|\, Y_s = x) = p(s, x, t, A).$$

Eindeutigkeit P_{Y_s}-fast sicher. Bez. *Übergangswahrscheinlichkeiten.* Für $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $E(|f \circ Y_t|) < \infty$ ergibt sich

$$E(f \circ Y_t \,|\, Y_s = x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, p(s, x, t, dy). \tag{13}$$

Siehe: Wahrscheinlichkeitstheorie, reguläre bedingte Warscheinlichkeiten.
Für $0 \le r \le s \le t$ und $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*

$$p(r, x, t, A) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s, y, t, A)\, p(r, x, s, dy),$$

Beweis `Übung` 11.3. Siehe `Übung` 5.2 zur Konstruktion von Markov-Prozessen mit gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten.
Im Spezialfall (11) lautet die Gleichung (13)

$$E(f \circ X_t \,|\, X_s = x) = E(f \circ X_t^{s,x}). \tag{14}$$

Satz 5. Gelte $E\|\xi\|^{2m} < \infty$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert für jedes $T > 0$ eine Konstante $c > 0$ mit

$$\forall\ s, t \in [0, T]: \quad E\|X_t - X_s\|^{2m} \le c \cdot |t-s|^m$$

und

$$E\left(\max_{0 \le t \le T} \|X_t\|^{2m}\right) \le c.$$

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 306). □

Wir studieren nun lokale Eigenschaften von X. Im folgenden: Erwartungswerte von vektor- bzw. matrixwertigen Zufallsvariablen komponentenweise definiert.

Satz 6. Sind μ und σ stetig, so folgt

$$\lim_{t\to s+} \frac{1}{(t-s)^n} \cdot P(\{\|X_t^{s,x} - x\| > \varepsilon\}) = 0 \tag{15}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ sowie

$$\lim_{t\to s+} \frac{1}{t-s} \cdot E(X_t^{s,x} - x) = \mu(s,x) \tag{16}$$

und

$$\lim_{t\to s+} \frac{1}{t-s} \cdot E((X_t^{s,x} - x) \cdot (X_t^{s,x} - x)^T) = a(s,x), \tag{17}$$

wobei

$$a = \sigma \cdot \sigma^T : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}.$$

Beweis. Wähle $m > n$, beachte

$$P(\{\|X_t^{s,x} - x\| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2m}} \cdot E\|X_t^{s,x} - X_s^{s,x}\|^{2m},$$

und verwende Satz 5, um (15) zu erhalten.
Es gilt

$$E(X_t^{s,x} - x) = E\left(\int_s^t \mu(u, X_u^{s,x})\, du\right) \tag{18}$$

sowie aufgrund der Stetigkeit von μ

$$\lim_{t\to s+} \frac{1}{t-s} \cdot \int_s^t \mu(u, X_u^{s,x})\, du = \mu(s,x).$$

Deshalb gilt (16), falls $\frac{1}{t-s} \cdot \int_s^t \mu_i(u, X_u^{s,x})\, du$ eine gleichgradig integrierbare Familie von Zufallsvariablen ist. Letzteres ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{t-s} \cdot \int_s^t \mu_i(u, X_u^{s,x})\, du\right)^2 &\leq \frac{1}{t-s} \cdot \int_s^t \mu_i^2(u, X_u^{s,x})\, du \\ &\leq \frac{K}{t-s} \cdot \int_s^t (1 + \|X_u^{s,x}\|^2)\, du\end{aligned}$$

und (4).
Zum Beweis von (17) ist Proposition 1 hilfreich, siehe Friedman (1975, p. 116). □

Bemerkung 3. In Verbindung mit (14) zeigt Satz 6

$$E\left(X_t^{(i)} - x_i \,|\, X_s = x\right) = \mu_i(s,x) \cdot (t-s) + o(t-s)$$

und

$$E\left((X_t^{(i)} - x_i) \cdot (X_t^{(j)} - x_j) \,|\, X_s = x\right) = a_{i,j}(s,x) \cdot (t-s) + o(t-s).$$

Betrachte in diesem Lichte exemplarisch die Brownsche Bewegung, den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß und die geometrische Brownsche Bewegung.

Definition 7. $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozeß X heißt[11] *Diffusionsprozeß* mit *Driftkoeffizient* b :

[11] Terminologie nicht einheitlich.

$I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und *Kovarianzkoeffizient* $a : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$, falls gilt

(i) X besitzt stetig Pfade,

(ii) X ist Markov-Prozeß (bzgl. $\mathfrak{F}^X$),

(iii) die Übergangswahrscheinlichkeiten p von X erfüllen für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_{\{\|y-x\|>\varepsilon\}} p(s,x,t,dy) = o(t-s),$$

$$\int_{\{\|y-x\|\leq\varepsilon\}} (y-x)\, p(s,x,t,dy) = b(s,x)\cdot(t-s) + o(t-s),$$

$$\int_{\{\|y-x\|\leq\varepsilon\}} (y-x)\cdot(y-x)^T\, p(s,x,t,dy) = a(s,x)\cdot(t-s) + o(t-s).$$

Satz 7. Sind μ und σ stetig, so ist die starke Lösung von (11) ein Diffusionsprozess mit Driftkoeffizient

$$b = \mu \tag{19}$$

und Kovarianzkoeffizient

$$a = \sigma \cdot \sigma^T. \tag{20}$$

Beweis. Folgt aus den Sätzen 4, 5 und 6 sowie

$$\int_{\{\|y-x\|>\varepsilon\}} \|y-x\|^2 p(s,x,t,dy) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \|y-x\|^4 p(s,x,t,dy).$$

□

Umkehrung von Satz 7: Darstellung von Diffusionsprozessen als starke bzw. schwache Lösung von stochastischen Differentialgleichungen. Siehe Gihman, Skorohod (1979, Thm. III.1.10) und Rogers, Williams (2000, Chap. V).

Bez.: $C^{1,2}$ Raum der stetigen Abbildungen $u : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ auf $]0,\infty[\, \times \mathbb{R}^d$ besitzen, welche stetig auf $I \times \mathbb{R}^d$ fortsetzbar sind.

Betrachte den Differentialoperator

$$Lu = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{21}$$

Im folgenden: a und b gemäß (19) und (20) gewählt.

Beispiel 7. Für $r = d$, $\mu = 0$ und $\sigma = \mathrm{Id}_d$ (d-dimensionale Brownsche Bewegung) gilt

$$(Lu)(t,x) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) = \tfrac{1}{2} \cdot (\Delta u(t,\cdot))(x).$$

Nun $r = d = 1$ und $\mu(t,x) = \widetilde{\mu} \cdot x$. Für $\sigma = 1$ (Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß) gilt

$$(Lu)(t,x) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \widetilde{\mu} \cdot x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$

Für $\sigma(t,x) = \widetilde{\sigma} \cdot x$ (geometrische Brownsche Bewegung) gilt

$$(Lu)(t,x) = \tfrac{1}{2} \cdot \widetilde{\sigma}^2 \cdot x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \widetilde{\mu} \cdot x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$

Proposition 1. Für $u \in C^{1,2}$ gilt

$$u(t, X_t) = u(s, X_s) + \int_s^t \left(Lu + \frac{\partial u}{\partial t} \right)(\tau, X_\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^d \int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(\tau, X_\tau)\, dM_\tau^{(i)},$$

wobei

$$M^{(i)} = \sum_{\ell=1}^r M^{(i,\ell)} \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$$

mit

$$M_t^{(i,\ell)} = \int_0^t \sigma_{i,\ell}(s, X_s)\, dW_s^{(\ell)}, \qquad t \geq 0.$$

Beweis. Durch

$$Z_t^{(i)} = \mu_i(t, X_t), \qquad t \geq 0,$$

wird ein progressiv meßbarer, pfadweise lokal integrierbarer Prozeß definiert. Somit definiert

$$B_t^{(i)} = \int_0^t Z_s^{(i)}\, ds, \qquad t \geq 0,$$

einen adaptierten, pfadweise lokal absolut-stetigen Prozeß. Aus (4) folgt $M^{(i,\ell)} \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$. Schließlich sichern Satz III.2 und Proposition I.10

$$\begin{aligned}\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_t &= \sum_{\ell,m=1}^r \langle M^{(i,\ell)}, M^{(j,m)} \rangle_t = \sum_{\ell,m=1}^r \int_0^t \sigma_{i,\ell}(s, X_s) \cdot \sigma_{j,m}(s, X_s)\, d\langle W^{(\ell)}, W^{(m)} \rangle_s \\ &= \sum_{\ell=1}^r \int_0^t \sigma_{i,\ell}(s, X_s) \cdot \sigma_{j,\ell}(s, X_s)\, ds = \int_0^t a_{i,j}(s, X_s)\, ds.\end{aligned}$$

Wende die Ito-Formel an, siehe Übung 11.4. □

Bemerkung 4. Nach Proposition 1 definiert

$$u(t, X_t) - u(0, X_0) - \int_0^t \left(Lu + \frac{\partial u}{\partial t} \right)(\tau, X_\tau)\, d\tau$$

ein lokales Martingal und etwa im Falle beschränkter Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sogar ein Martingal. Dies führt zu einer abstrakteren Definition von Diffusionsprozessen, siehe Rogers, Williams (2000, p. 111). Die Wahl von $u(t,x) = x_i$ liefert (18), und $u(t,x) = x_i \cdot x_j$ wird im Beweis von (17) verwendet.

Definition 8. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *polynomial beschränkt*, falls

$$\exists\, k \in \mathbb{N}_0 : \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{1 + \|x\|^k} < \infty.$$

Betrachte die elliptischen Differentialoperatoren

$$L_s f = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(s,\cdot) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(s,\cdot) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

vgl. (21) und siehe Beispiel 7.

Satz 8. Sei f zweimal stetig differenzierbar mit polynomial beschränkten zweiten Ableitungen. Ferner seien μ und σ stetig. Dann

$$E(f(X_t^{s,x}) - f(x)) = E\left(\int_s^t L_\tau f(X_\tau^{s,x})\, d\tau\right)$$

und

$$\lim_{t \to s+} \frac{1}{t-s} \cdot E(f(X_t^{s,x}) - f(x)) = (L_s f)(x).$$

Beweis. Beachte, daß auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (und f) polynomial beschränkt sind. Die erste Identität folgt aus Proposition 1 mit $u(t,x) = f(x)$ und $X = X^{s,x}$. Fahre fort wie im Beweis von Satz 6. □

Bemerkung 5. Betrachte die autonome Gleichung[12]

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t, \qquad t \geq 0, \\ X_0 &= \xi, \end{aligned} \tag{22}$$

wobei μ und σ die globale Lipschitzbedingung erfüllen. Für die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten gilt

$$p(s,x,t,\cdot) = p(0,x,t-s,\cdot),$$

und wir setzen deshalb

$$p(t,x,\cdot) = p(0,x,t,\cdot).$$

Definiere stetige lineare Operatoren

$$T_t : B \to B$$

auf dem Raum B der beschränkten Borel-meßbaren Abbildungen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $T_0 = \mathrm{id}$ und

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, p(t,x,dy) = E(f \circ X_t \mid X_0 = x)$$

[12] Rückführung einer nicht-autonomen Gleichung $d\widetilde{X}_t = \widetilde{\mu}(t, X_t)\, dt + \widetilde{\sigma}(t, X_t)\, dW_t$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$ auf den autonomen Fall: für $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^d$ und $t \in I$ setzt man

$$x = \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mu(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}(\widetilde{x},t) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \sigma(x) = \begin{pmatrix} \sigma(\widetilde{x},t) \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times r}$$

sowie

$$\xi = \begin{pmatrix} \widetilde{\xi} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad X_t = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

für $t > 0$. Klar:

$$T_t 1_A = p(t, \cdot, A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d),$$

und die Chapman-Kolmogorov-Gleichung sichert

$$T_t \circ T_s = T_{s+t}.$$

Man bezeichnet $(T_t)_{t \geq 0}$ als *Halbgruppe der Übergangsoperatoren* des Markov-Prozesses X. Nach Satz 8 gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t} = (\mathcal{L} f)(x)$$

für

$$\mathcal{L} f = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Man bezeichnet $\mathcal{L}$ als *infinitesimalen Generator* der Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$.

3 Parabolische und stochastische Differentialgleichungen

Fixiere $T > 0$.

Bez.: $C_T^{1,2}$ Raum der stetigen Abbildungen $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, deren partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ auf $]0, T[\times \mathbb{R}^d$ existieren, stetig sind und stetige Fortsetzungen auf $[0, T[\times \mathbb{R}^d$ besitzen.

Betrachte den Differentialoperator L aus (21) mit

$$\forall\ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d : \quad a(t, x) \text{ symmetrisch, nichtnegativ definit,}$$

und eine stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

Gesucht ist eine Lösung

$$u \in C_T^{1,2}$$

der (rückwärts) parabolischen Differentialgleichung

$$Lu = -\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{auf } [0, T[\times \mathbb{R}^d \tag{23}$$

mit Endbedingung

$$u(T, \cdot) = \varphi. \tag{24}$$

Definition 9. $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *polynomial beschränkt auf* $J \times \mathbb{R}^d$ für $J \subset [0, T]$, falls

$$\exists\ k \in \mathbb{N}_0 : \qquad \sup_{(t,x) \in J \times \mathbb{R}^d} \frac{|u(t, x)|}{1 + \|x\|^k} < \infty.$$

Zu $a : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ wählen wir $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times r}$ mit $a = \sigma \cdot \sigma^T$ und setzen $\mu = b$. Im folgenden vorausgesetzt: μ und σ sind stetig und erfüllen die globale Lipschitzbedingung. Wir betrachten die durch (12) definierten Diffusionsprozesse $(X_t^{s,x})_{t\in[s,T]}$ für $0 \le s \le T$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Beispiel 8. Für $a = \sigma = \mathrm{Id}_d$ und $b = \mu = 0$ ist (23) die Wärmeleitungsgleichung

$$\tfrac{1}{2} \cdot \Delta u = -\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{auf } [0,T[\times \mathbb{R}^d$$

mit Zeitumkehr. Ferner gilt $X_t^{s,x} = x + W_t - W_s$, d.h. $X^{s,x}$ ist eine zur Zeit s in x startende d-dimensionale Brownsche Bewegung. Ist φ polynomial beschränkt, so definiert bekanntlich (oder infolge der Sätze 9 und $\boxed{??}$)

$$u(s,x) = (2\pi\,(T-s))^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \cdot \exp\left(-\tfrac{|y-x|^2}{2\,(T-s)}\right)\, dy, \qquad (s,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^d,$$

die eindeutig bestimmte auf $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ polynomial beschränkte Lösung von (23), (24). Beachte, daß $u(s,x) = E(\varphi \circ X_T^{s,x})$. Dieser Zusammenhang gilt allgemein.

Satz 9. Sei u eine auf $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ polynomial beschränkte Lösung von (23), (24). Dann

$$\forall\ (s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d : \quad u(s,x) = E(\varphi \circ X_T^{s,x}).$$

Beweis. Proposition 1 zeigt für $0 \le s < t < T$ und $x \in \mathbb{R}^d$

$$u(t, X_t^{s,x}) = u(s,x) + N_t$$

mit einem stetigen lokalen Martingal N. Betrachte die Stoppzeiten

$$T_n = \inf\{\tau \ge s : \|X_\tau\| \ge n\} \wedge T.$$

Aufgrund der Stetigkeit von a und $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ folgt

$$E(N_{t\wedge T_n}) = 0.$$

Also

$$u(s,x) = E(u(t\wedge T_n, X_{t\wedge T_n}^{s,x})).$$

Die Wachstumsbedingung für u sichert

$$|u(t\wedge T_n, X_{t\wedge T_n}^{s,x})| \le c \cdot (1 + n^k)$$

mit Konstanten $c > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$, und aufgrund der Stetigkeit von u und X folgt

$$u(s,x) = E(u(T_n, X_{T_n}^{s,x}))$$

mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz. Die Wachstumsbedingung für φ und der Lebesguesche Grenzwertsatz liefern

$$\lim_{n\to\infty} E\left(u(T_n, X_{T_n}^{s,x}) \cdot 1_{\{T_n = T\}}\right) = E(\varphi \circ X_T^{s,x}).$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} E\left(u(T_n, X^{s,x}_{T_n}) \cdot 1_{\{T_n<T\}}\right) &\leq c \cdot (1+n^k) \cdot P(\{T_n < T\}) \\ &\leq c \cdot (1+n^k) \cdot P(\{\sup_{s\leq\tau\leq T} \|X_\tau\| \geq n\}) \\ &\leq c \cdot (1+n^k) \cdot n^{-\ell} \cdot E(\sup_{s\leq\tau\leq T} \|X_\tau\|^\ell) \end{aligned}$$

für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Wähle $\ell > k$ und verwende Satz 5, um

$$\lim_{n\to\infty} E(u(T_n, X^{s,x}_{T_n}) \cdot 1_{\{T_n<T\}}) = 0$$

zu erhalten. □

Bemerkung 6. Satz 9 zeigt, daß jede polynomial beschränkte Lösung von (23), (24) eine stochastische Darstellung besitzt. Der Eindeutigkeitssatz 3 sichert, daß die Verteilung von $X^{s,x}$ nur von s und x sowie von μ und σ abhängt. Also haben wir mit probabilistischen Methoden gezeigt, daß (23), (24) für jede polynomial beschränkte Abbildung φ höchstens eine polynomial beschränkte Lösung besitzt.

Ein klassischer Text zur Analyse parabolischer Gleichungen mit deterministischen Methoden ist Friedman (1964).

Bemerkung 7. Falls a und b gewissen Glattheits- und Wachstumsbedingungen genügen, existiert eine Abbildung

$$\Gamma : \left\{(s,x,t,y) \in ([0,T] \times \mathbb{R}^d)^2 : s < t\right\} \to \mathbb{R},$$

so daß

$$\forall\ (t,y) \in \,]0,T] \times \mathbb{R}^d : \quad L\Gamma(\cdot,\cdot,t,y) = -\frac{\partial\Gamma(\cdot,\cdot,t,y)}{\partial s} \tag{25}$$

und für jede polynomial beschränkte Funktion φ

$$\lim_{s\to t-} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \cdot \Gamma(s,x,t,y)\, dy = \varphi(x)$$

gilt. Die Abbildung Γ heißt *Fundamentallösung* zu (23), und (25) heißt *Kolmogorov-Rückwärtsgleichung.* Man erhält zu jeder polynomial beschränkten Abbildung φ durch

$$u(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \cdot \Gamma(s,x,T,y)\, dy, \qquad (s,x) \in [0,T[\, \times \mathbb{R}^d,$$

eine auf $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ polynomial beschränkte Lösung von (23), (24). Siehe Friedman (1964, Chap. 1).

Fazit: unter den o.n.g. Voraussetzungen ist $\Gamma(s,x,t,\cdot)$ die Dichte der Verteilung von $X^{s,x}_t$.

Beispiel 9. Die Übergangsdichten der d-dimensionalen Brownschen Bewegung bilden eine Fundamentallösung für $L = \frac{1}{2} \cdot \Delta$.

Satz 10 (Feynman-Kac-Formel)**.** Seien

$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty[$$

und

$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

stetig. Ferner seien g und die Lösung $u \in C_T^{1,2}$ von

$$Lu + g = -\frac{\partial u}{\partial t} + h \cdot u \qquad \text{auf } [0,T[\times \mathbb{R}^d$$

und

$$u(T,\cdot) = \varphi$$

auf $[0,T] \times \mathbb{R}$ polynomial beschränkt. Dann gilt für $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} u(s,x) = E\Bigg(\varphi(X_T^{s,x}) \cdot \exp\left(-\int_s^T h(t, X_t^{s,x})\, dt\right) \\ + \int_s^T g(t, X_t^{s,x}) \cdot \exp\left(-\int_s^t h(\tau, X_\tau^{s,x})\, d\tau\right) dt\Bigg). \end{aligned}$$

Beweis. Ähnlich dem von Satz 9. Siehe Karatzas, Shreve (1999, Thm. 5.7.6). □

Nun: eine Existenzaussage mit probabilistischen Methoden.

Anhang A

Funktionen von beschränkter Variation und das Lebesgue-Stieltjes-Integral

Literatur:

Floret (1981), Heuser (2001).

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a < b$ setzen wir

$$V_a^b(f) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{m} |f(t_k) - f(t_{k-1})| : m \in \mathbb{N},\ a = t_0 < \cdots < t_m = b\Big\}.$$

Definition 1. f von *beschränkter Variation (b.V.)*, falls

$$\forall\ a < b: \qquad V_a^b(f) < \infty.$$

Satz 1 (Jordanscher Zerlegungssatz)**.** Äquivalent sind

(i) f b.V. (und rechtsseitig stetig),

(ii) $\exists\ f_1, f_2$ monoton wachsend (und rechtsseitig stetig) mit $f = f_1 - f_2$.

Zu f b.V. und rechtsseitig stetig sowie f_1, f_2 wie oben erhält man ein signiertes Maß μ_f auf $\{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : A \text{ beschränkt}\}$ per

$$\mu_f(]u,v]) = (f_1(v) - f_1(u)) - (f_2(v) - f_2(u)), \qquad u < v.$$

Satz 2 (Rieszscher Darstellungssatz auf $\mathbb{R}$)**.** Durch

$$f \mapsto \mu_f$$

wird eine lineare Bijektion

$$\{f : f \text{ b.V. und rechtsseitig stetig},\ f(0) = 0\} \to \{\mu : \mu \text{ signiertes Maß auf } \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

definiert.

Integrale bzgl. signierter Maße werden als Differenz der Integrale bzgl. des Positiv- und des Negativteils des Maßes definiert. Betrachten wir ohne Einschränkung ein signiertes Maß μ_f mit $f = f_1 - f_2$ wie oben, so ist dessen Positiv- und Negativteil durch μ_{f_1} und μ_{f_2}, also durch die nicht-negativen Maße mit den Verteilungsfunktionen f_1 und f_2 gegeben.

Falls für eine meßbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger die Integrale bezüglich μ_{f_1} und μ_{f_2} existieren, bezeichnet man

$$\int_{\mathbb{R}} g\, df = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_f = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_{f_1} - \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_{f_2}$$

als *Lebesgue-Stieltjes Integral* von g bzgl. f. Im Spezialfall einer stetigen Funktion g mit kompaktem Träger liegt ein sogenanntes Riemann-Stieltjes-Integral vor, das sich als Grenzwert von Riemann-Stieltjes-Summen berechnen laßt.

Anhang B

Mehrdimensionale Normalverteilungen

Für einen d-dimensionalen Zufallsvektor

$$X = (X_1, \dots, X_d)^\top$$

mit quadratisch-integrierbaren Komponenten X_i definiert man seinen *Erwartungswert* durch

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

und seine *Kovarianzmatrix* durch

$$\operatorname{Cov}(X) = \begin{pmatrix} \operatorname{Cov}(X_1, X_1) & \dots & \operatorname{Cov}(X_1, X_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_d, X_1) & \dots & \operatorname{Cov}(X_d, X_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

mit

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = E((X_i - E(X_i)) \cdot (X_j - E(X_j))).$$

In Verallgemeinerung der Rechenregeln für den Erwartungswert und die Varianz einer reellwertigen Zufallsvariablen gilt dann

$$E(LX + b) = LE(X) + b$$

und

$$\operatorname{Cov}(LX + b) = L \operatorname{Cov}(X) L^\top$$

für jede Matrix $L \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^k$. Die letzte Gleichung liefert insbesondere für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d \times 1}$

$$0 \leq \sigma^2(v^\top X) = v^\top \operatorname{Cov}(X)\, v,$$

so daß jede Kovarianzmatrix symmetrisch und nicht-negativ definit ist.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$ mit der Lebesgue-Dichte

$$\rho(x) = (2\pi)^{-d/2} \exp(-(x_1^2 + \cdots + x_d^2)/2)$$

für $x \in \mathbb{R}^d$ heißt *d-dimensionale Standard-Normalverteilung*. Die Dichte ρ ist das d-fache Tensorprodukt der Dichte der eindimensionalen Standard-Normalverteilung. Ein d-dimensionaler Zufallsvektor X ist deshalb genau dann d-dimensional standard-normalverteilt, wenn er unabhängige, jeweils eindimensional standard-normalverteilte Komponenten besitzt. Insbesondere gilt in diesem Fall

$$E(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}^k$ heißt *k-dimensionale Normalverteilung*, falls Q sich durch eine affin-lineare Transformation aus einer d-dimensionalen Standard-Normalverteilung ergibt. Eine k-dimensionale Normalverteilung ist also die Verteilung eines k-dimensionalen Zufallsvektors Y von der Form

$$Y = LX + b \tag{1}$$

mit einem d-dimensional standard-normalverteilten Zufallsvektor X, einer Matrix $L \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^k$.

Ist Y von der Form (1), so gilt

$$E(Y) = b \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(Y) = LL^\top,$$

und diese beiden Größen bestimmen die Verteilung Q von Y bereits eindeutig, siehe Irle (2001, p. 127 ff.) und Gänssler, Stute (1977, Abschnitt 1.19)

$$\Sigma = LL^\top \tag{2}$$

heißt Q dann die *k-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert b und Kovarianzmatrix Σ*.

Jede symmetrische nicht-negativ definite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ist diagonalisierbar mit nicht-negativen Eigenwerten und somit in der Form (2) darstellbar. Also treten genau die symmetrischen nicht-negativ definiten Matrizen als Kovarianzmatrizen von Normalverteilungen auf.

Literatur

R. J. Adler, The Geometry of Random Fields, Wiley, Chichester, 1981.

L. Arnold, Stochastische Differentialgleichungen, Oldenbourg, München, 1973.

K. L. Chung, A Course in Probability Theory, Academinc Press, New York, 1974.

K. L. Chung, R. J. Williams, Introduction to Stochastic Integration, Birkhäuser, Boston, 1990.

R. J. Elliott, Stochastic Calculus and Applications, Springer, New York, 1982.

K. Floret, Maß- und Integrationstheorie, Teubner, Stuttgart, 1981.

A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications, Vol. 1, Academic Press, New York, 1975.

P. Gänssler, W. Stute, Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

I. I. Gihman, A. V. Skorohod, The Theory of Stochastic Processes III, Springer, Berlin, 1979.

H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Teubner, Stuttgart, 2001.

I. Karatzas, S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, New York, 1999.

K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, 1967.

L. Partzsch, Vorlesungen zum eindimensionalen Wienerschen Prozeß, Teubner, Leipzig, 1984.

P. Protter, Stochastic Integration and Differential Equations, Springer-Verlag, 1990.

L. C. G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. 2, Cambridge Univ. Press, 2000.

J. Yeh, Martingales and Stochastic Analysis, World Scientific, Singapore, 1995.

sowie

N. H. Bingham, R. Kiesel, Risk-Neutral Valuation, Springer-Verlag, London, 1998.

N. A. C. Cressie, Statistics for Spatial Data, Wiley, New York, 1993.

E. Eberlein, Grundideen moderner Finanzmathematik, DMV-Mitteilungen 3/98, 10–20, 1998.

H. Föllmer, Ein Nobelpreis für Mathematik?, DMV-Mitteilungen 1/98, 4–7, 1998.

H.-O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, de Gruyter, Berlin, 1988.

P. E. Kloeden, E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin, 1995.

A. Irle, Finanzmathematik, Teubner, Stuttgart, 1998.

G. Winkler, Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods, Springer-Verlag, Berlin, 1995.