Kapitel IV

Stochastische Differentialgleichungen

Literatur:

> Karatzas, Shreve (1999, Chap. 5),
> Rogers, Williams (2000, Chap. V),
> Arnold (1973, Kap. 6–10),
> Friedman (1975).

Die Integralgleichung (III.6) für die geometrische Brownsche Bewegung wird symbolisch in Differentialform

$$dS_t = \mu \cdot S_t \, dt + \sigma \cdot S_t \, dW_t, \qquad S_0 = s_0,$$

geschrieben. Man verwendet allgemein stochastische Differentialgleichungen zur Definition von Diffusionsprozessen, insbesondere von Preisprozessen in zeit-kontinuierlichen Finanzmarktmodellen. Im folgenden: $I = [0, \infty[$.

1 Lösungsbegriffe, Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben: Borel-meßbare Abbildungen

$$\mu = (\mu_i)_{i=1,\dots,d} : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

und

$$\sigma = (\sigma_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,d,\\ j=1,\dots,r}} : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times r},$$

wobei $d, r \in \mathbb{N}$, sowie[1]

(a) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und darauf

(b) r-dimensionale Brownsche Bewegung W bzgl. $\mathfrak{F}^W$ mit Startpunkt 0,

[1]Existenz für jede vorgegebene Verteilung von ξ: Produktraum.

(c) $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor ξ, unabhängig von $\mathfrak{F}_\infty^W$.

Für $t \in I$ sei

$$\mathfrak{G}_t = \sigma(\{\xi\} \cup \{W_s : 0 \le s \le t\}),$$

$\mathfrak{N}$ das System der Nullmengen bzgl. $(\Omega, \mathfrak{G}_\infty, P)$ und

$$\mathfrak{F}_t = \sigma(\mathfrak{G}_t \cup \mathfrak{N}).$$

Wir betrachten im folgenden den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ und halten fest: die Filtration $\mathfrak{F}$ erfüllt die üblichen Voraussetzungen, und W ist auch bzgl. $\mathfrak{F}$ eine Brownsche Bewegung. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 285) und vgl. Abschnitt II.3.4.

Definition 1. $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ heißt *starke Lösung* der *stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t \tag{1}$$

mit *Anfangsbedingung*

$$X_0 = \xi \tag{2}$$

(basierend auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, W und ξ), falls

(i) X adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(ii) X besitzt stetige Pfade,

(iii) für alle $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, r$ und $t \in I$ gilt P-f.s.

$$\int_0^t \left(|\mu_i(s, X_s)| + \sigma_{i,j}^2(s, X_s)\right)\, ds < \infty,$$

(iv) für alle $i = 1, \dots, d$ und $t \in I$ gilt[2]

$$X_t^{(i)} = \xi^{(i)} + \int_0^t \mu_i(s, X_s)\, ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)\, dW_s^{(j)}.$$

Man bezeichnet[3] μ als *Driftkoeffizienten*, und σ als *Diffusionskoeffizienten* der Gleichung (1).

Beispiel 1. Betrachte die *Langevin-Gleichung*

$$dX_t = \mu \cdot X_t\, dt + \sigma\, dW_t \tag{3}$$

mit Startwert $x \in \mathbb{R}$. Hier: $r = d = 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Setze

$$X_t^{(1)} = \exp(\mu\, t) = 1 + \underbrace{\exp(\mu\, t) - 1}_{=B_t^{(1)}}, \qquad M_t^{(1)} = 0,$$

[2]Kurz: vektorwertig $X_t = \xi + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$.
[3]Bezeichnung nicht einheitlich.

und

$$X_t^{(2)} = x + \underbrace{\sigma \int_0^t \exp(-\mu\, s)\, dW_s}_{=M_t^{(2)}}, \qquad B_t^{(2)} = 0.$$

Partielle Integration (Satz III.7) liefert

$$X_t^{(1)} \cdot X_t^{(2)} = x + \int_0^t X_s^{(2)}\, dB_s^{(1)} + \int_0^t X_s^{(1)}\, dM_s^{(2)}.$$

Es gilt

$$\int_0^t X_s^{(2)}\, dB_s^{(1)} = \int_0^t X_s^{(2)} \cdot \mu \exp(\mu\, s)\, ds = \mu \int_0^t X_s^{(2)} \cdot X_s^{(1)}\, ds,$$

und Satz III.3 zeigt[4]

$$\int_0^t X_s^{(1)}\, dM_s^{(2)} = \int_0^t X_s^{(1)} \cdot \sigma \exp(-\mu\, s)\, dW_s = \sigma\, W_t.$$

Fazit: $X = X^{(1)} \cdot X^{(2)}$ löst die Integralgleichung

$$X_t = x + \mu \int_0^t X_s\, ds + \sigma \int_0^t dW_s.$$

Offenbar ist Y eine starke Lösung von (3) mit Startwert x. Der Prozeß X heißt *Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß*.

Definition 2. Für μ und σ gilt[5] die *starke Eindeutigkeit*, falls für jede Wahl von (a)–(c) und alle hierauf basierende starke Lösungen X und $\widetilde{X}$ von (1), (2) gilt

$$X \text{ und } \widetilde{X} \text{ sind ununterscheidbar.}$$

Beispiel 2. Die Lösung der Langevin-Gleichung ist stark eindeutig bestimmt[6]. Betrachte nämlich zwei starke Lösungen X und $\widetilde{X}$, gemeinsam basierend auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, W und ξ und setze $\Delta = X - \widetilde{X}$. Offenbar besitzt Δ P-f.s. stetig differenzierbare Pfade. Es gilt für P-f.a. $\omega \in \Omega$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\Delta_t(\omega) = \mu \cdot \Delta_t(\omega)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Delta_0(\omega) = 0.$$

Es folgt $\Delta = 0$ P-f.s.

Lemma 1 (Gronwall)**.** Für $\alpha, g : [0,T] \to \mathbb{R}$ gelte: α integrierbar, g stetig und

$$\forall\, t \in [0,T] : \quad g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)\, ds$$

mit einer Konstanten $\beta \geq 0$. Dann

$$\forall\, t \in [0,T] : \quad g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) \cdot \exp(\beta\,(t-s))\, ds.$$

[4] Alternative: Verwende Übung 9.4 und die Definition des stochastischen Integrals.

[5] Man spricht auch von starker Eindeutigkeit der Lösung von (1).

[6] Genauer: für $(t,x) \mapsto \mu\, x$ und $(t,x) \mapsto \sigma$ gilt die starke Eindeutigkeit.

Beweis. Für $h(t) = \exp(-\beta\, t) \int_0^t g(s)\, ds$ gilt

$$h'(t) = \exp(-\beta\, t) \cdot \left(g(t) - \beta \int_0^t g(s)\, ds \right) \le \exp(-\beta\, t) \cdot \alpha(t).$$

Also

$$h(t) = \int_0^t h'(s)\, ds \le \int_0^t \exp(-\beta\, s) \cdot \alpha(s)\, ds$$

und somit

$$\int_0^t g(s)\, ds \le \int_0^t \alpha(s) \cdot \exp(\beta\, (t-s))\, ds.$$

□

Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ beliebige Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen V.

Definition 3. *Lokale Lipschitzbedingung (bzgl. der Zustandsvariable)* für Abbildung $f : I \times \mathbb{R}^d \to V$

$$\begin{aligned} &\forall\, c > 0 \ \ \exists\, K > 0 \ \ \forall\, t \in I, x, y \in \mathbb{R}^d : \\ &\quad \max(\|x\|, \|y\|) \le c \quad \Rightarrow \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \le K \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Satz 1.

$$\text{Lokale Lipschitzbed. für } \mu \text{ und } \sigma \quad \Rightarrow \quad \text{starke Eindeutigkeit für } \mu \text{ und } \sigma.$$

Beweis. Hier: $r = d = 1$. Der allgemeine Fall: `Übung`.
In einer Situation (a)–(c) seien $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ starke Lösungen von (1), (2). Betrachte die Stoppzeiten

$$S_n = \inf\{t \in I : \max(|X_t^{(1)}|, |X_t^{(2)}|) \ge n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

siehe Proposition I.5.(ii), sowie die durch

$$g_n(t) = E \left| X^{(1)}_{t \wedge S_n} - X^{(2)}_{t \wedge S_n} \right|^2, \qquad t \in I,$$

definierten stetigen Funktionen.
Setze

$$z = t \wedge S_n, \quad \delta_u = \mu(u, X_u^{(1)}) - \mu(u, X_u^{(2)}), \quad \Delta_u = \sigma(u, X_u^{(1)}) - \sigma(u, X_u^{(2)}).$$

Dann

$$X_z^{(1)} - X_z^{(2)} = \int_0^z \delta_u\, du + \int_0^z \Delta_u\, dW_u$$

und

$$\left| X_z^{(1)} - X_z^{(2)} \right|^2 \le 2 \cdot \left| \int_0^z \delta_u\, du \right|^2 + 2 \cdot \left| \int_0^z \Delta_u\, dW_u \right|^2.$$

Weiter

$$\left| \int_0^z \delta_u\, du \right|^2 \le \left(\int_0^z |\delta_u|\, du \right)^2 \le z \cdot \int_0^z |\delta_u|^2\, du \le K_1\, t \cdot \int_0^t \left| X^{(1)}_{u \wedge S_n} - X^{(2)}_{u \wedge S_n} \right|^2 du$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten $K_1 \geq 0$. Es gilt

$$I_{t \wedge S_n}(\Delta) = I_t(\widetilde{\Delta}) \qquad \text{für} \qquad \widetilde{\Delta}_u(\omega) = \Delta_u(\omega) \cdot 1_{\{u \leq S_n(\omega)\}},$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, (3.2.24) und p. 147) und vgl. Lemma III.3. Deshalb liefert die Ito-Isometrie

$$E \left| \int_0^z \Delta_u \, dW_u \right|^2 = E \left(\int_0^t \widetilde{\Delta}_u^2 \, du \right) = E \left(\int_0^z \Delta_u^2 \, du \right).$$

Schließlich

$$\int_0^z \Delta_u^2 \, du \leq K_2 \cdot \int_0^z \left| X_u^{(1)} - X_u^{(2)} \right|^2 du \leq K_2 \cdot \int_0^t \left| X_{u \wedge S_n}^{(1)} - X_{u \wedge S_n}^{(2)} \right|^2 du$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten $K_2 \geq 0$. Zusammenfassend: mit $K = \max(K_1, K_2)$ erhält man

$$g_n(t) \leq 2\,K \cdot (1+t) \cdot \int_0^t g_n(u)\, du.$$

Gronwalls Lemma liefert $g_n = 0$, d.h. $X_{t \wedge S_n}^{(1)}$ Modifikation von $X_{t \wedge S_n}^{(2)}$.
Da $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$, folgt aus

$$P\left(\left\{X_t^{(1)} = X_t^{(2)}\right\}\right) \geq P\left(\left\{X_{t \wedge S_n}^{(1)} = X_{t \wedge S_n}^{(2)}\right\} \cap \{S_n \geq t\}\right) = P\left(\{S_n \geq t\}\right),$$

daß $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ ununterscheidbar sind. □

Beispiel 3. Starke Eindeutigkeit für die Gleichungen

$$dX_t = \mu \cdot X_t \, dt + \sigma \, dW_t,$$
$$dX_t = \mu \cdot X_t \, dt + \sigma \cdot X_t \, dW_t.$$

Definition 4. $f : I \times \mathbb{R}^d \to V$ erfüllt eine

(i) *globale Lipschitzbedingung (bzgl. der Zustandsvariable)*, falls

$$\exists\, K > 0 \;\; \forall\, t \in I,\; x, y \in \mathbb{R}^d: \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K \cdot \|x - y\|,$$

(ii) *lineare Wachstumsbedingung (bzgl. der Zustandsvariable)*, falls

$$\exists\, K > 0 \;\; \forall\, t \in I,\; x \in \mathbb{R}^d: \quad \|f(t,x)\|^2 \leq K \cdot (1 + \|x\|^2).$$

Satz 2. In jeder Situation (a)–(c) gilt

$E\|\xi\|^2 < \infty \;\wedge\;$ globale Lipschitz- und lineare Wachstumsbedingung für μ und σ
$\Rightarrow$ Existenz einer starken Lsg. von (1), (2).

Ferner existiert für alle $T > 0$ eine Konstante C, die nur von T und den Lipschitz- und Wachstumskonstanten von μ und σ abhängt, so daß

$$\forall\, t \in [0,T]: \quad E\|X_t\|^2 \leq C \cdot (1 + E\|\xi\|^2) \cdot \exp(C\,t). \tag{4}$$

Beweis. Hier: $r = d = 1$.
Picard-Lindelöf-Iteration: setze $X^{(0)} = \xi$ und für $k \in \mathbb{N}_0$

$$X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t \mu(s, X_s^{(k)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})\, dW_s, \quad t \in I.$$

Man zeigt induktiv unter Verwendung der linearen Wachstumsbedingung: $X^{(k)}$ ist wohldefiniert, stetig und erfüllt $X^{(k)} \in \mathfrak{L}^*$ sowie für $T > 0$

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, t \in [0, T]: \quad E\big|X_t^{(k)}\big|^2 \leq C \cdot (1 + E|\xi|^2) \cdot \exp(C\, t). \tag{5}$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 388).
Beh:

$$P\text{-f.s. konvergiert } (X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \text{ gleichmäßig auf jedem Kompaktum.} \tag{6}$$

Betrachte

$$B_t^{(k)} = \int_0^t \big(\mu(s, X_s^{(k)}) - \mu(s, X_s^{(k-1)})\big)\; ds$$

und

$$M_t^{(k)} = \int_0^t \big(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})\big)\; dW_s.$$

Klar: $M^{(k)} \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$.
Wir verwenden eine Momentenungleichung für Martingale, siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 166): für $p > 0$ existieren Konstanten $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0$, so daß für jedes $M \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$ gilt[7]

$$\forall\, t \in I: \quad \Lambda_1 \cdot E(\langle M \rangle_t^p) \leq E\left(\max_{0 \leq s \leq t} |M_s|^{2p}\right) \leq \Lambda_2 \cdot E(\langle M \rangle_t^p).$$

Zusammen mit Satz III.1 und der Lipschitz-Bedingung zeigt dies

$$\begin{aligned} E\left(\max_{0 \leq s \leq t} \big(M_s^{(k)}\big)^2\right) &\leq \Lambda_2 \cdot E\left(\int_0^t \big(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})\big)^2\; ds\right) \\ &\leq \Lambda_2\, K_1 \cdot E\left(\int_0^t \big(X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\big)^2\; ds\right). \end{aligned}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned} \left(B_t^{(k)}\right)^2 &\leq t \cdot \int_0^t \big(\mu(s, X_s^{(k)}) - \mu(s, X_s^{(k-1)})\big)^2\; ds \\ &\leq K_2\, t \cdot \int_0^t \big(X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\big)^2\; ds. \end{aligned}$$

Fixiere $T > 0$, setze $L = 2\max(K_1, K_2)\,(\Lambda_2 + T)$. Dann gilt für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} E\left(\max_{0 \leq s \leq t} \big(X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\big)^2\right) &\leq 2\, E\left(\max_{0 \leq s \leq t} \big(M_s^{(k)}\big)^2\right) + 2\, E\left(\max_{0 \leq s \leq t} \big(B_s^{(k)}\big)^2\right) \\ &\leq L \cdot E\left(\int_0^t \big(X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\big)^2\; ds\right). \end{aligned}$$

[7] Allgemeiner für Stoppzeiten.

Für

$$C^* = \max_{0\le t\le T} E\left(X_t^{(1)} - \xi\right)^2$$

gilt $C^* < \infty$ wg. (5) und $E(\xi^2) < \infty$. Induktiv folgt

$$E\left(\max_{0\le s\le t}\left(X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\right)^2\right) \le C^* \,\frac{(L\,t)^k}{k!}, \tag{7}$$

und dies ergibt

$$P\left(\left\{\max_{0\le s\le T}\left|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\right| > 1/2^{k+1}\right\}\right) \le 4\,C^* \cdot \frac{(4\,L\,T)^k}{k!}.$$

Das Borel-Cantelli-Lemma sichert die Existenz von $\Omega^* \in \mathfrak{F}_\infty$ und $N : \Omega \to \mathbb{N}$ meßbar mit $P(\Omega^*) = 1$ und

$$\forall\, \omega \in \Omega^* \quad \forall\, n \ge N(\omega): \qquad \max_{0\le s\le T}\left|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\right| \le 1/2^{k+1}.$$

Hiermit folgt die Konvergenz (6).

Mit $X(\omega)$ bezeichnen wir den stetigen Grenzwert in Fall $\omega \in \Omega^*$, andernfalls sei $X(\omega) = 0$. Dies ist die gesuchte Lösung.

Genauer: Wir verifizieren die Forderungen aus Definition 1.

ad (i): $1_{\Omega^*}X^{(k)}$ definiert eine Modifikation von $X^{(k)}$, die wiederum adaptiert ist[8] und punktweise gegen X konvergiert. Also ist X adaptiert.

ad (ii) : klar.

ad (iii) : Zunächst erhält man (4) mittels (5) und dem Fatouschen Lemma. Die lineare Wachstumsbedingung liefert (iii).

ad (iv): Die Lipschitz-Bedingung liefert für jedes $t \in I$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t \mu(s, X_s^{(k)})\,ds = \int_0^t \mu(s, X_s)\,ds \qquad P\text{-f.s.} \tag{8}$$

Da $\left(X_t^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gemäß (7) eine Cauchy-Folge in $L_2(P)$ ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty} E\left(X_t^{(k)} - X_t\right)^2 = 0.$$

Zusammen mit (5) und dem Fatouschen Lemma ergibt sich

$$\sup_{0\le s\le t} E(X_s^2) \le \sup_{0\le s\le t}\liminf_{k\to\infty} E\left(\left(X_s^{(k)}\right)^2\right) \le \sup_{0\le s\le t}\sup_{k\in\mathbb{N}} E\Big(\left(X_t^{(k)}\right)^2\Big) < \infty.$$

Aufgrund der Ito-Isometrie und der Lipschitzbedingung gilt

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s)\right)\,dW_s\right)^2 &= E\left(\int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s)\right)^2\,ds\right) \\ &\le K \cdot \int_0^t E\left(X_s^{(k)} - X_s\right)^2\,ds. \end{aligned}$$

[8] Hier gehen die üblichen Voraussetzungen ein.

Man erhält

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\int_0^t \big(\sigma(s,X_s^{(k)})-\sigma(s,X_s)\big)\,dW_s\right)^2 = 0. \tag{9}$$

Kombiniere (8) und (9), um (iv) zu erhalten. □

Beispiel 4. Sei X eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Die zugrundeliegende Filtration $\mathfrak{G}=(\mathfrak{G}_t)_{t\in I}$ erfülle die üblichen Voraussetzungen. Definiere

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x\le 0\end{cases}.$$

sowie

$$W_t=\int_0^t \sigma(X_s)\,dX_s,\qquad t\in I.$$

Es gilt $W\in\mathfrak{M}_2^c$ mit

$$\langle W\rangle_t=\int_0^t \sigma^2(X_s)\,d\langle X\rangle_s = t.$$

Nach der Lévyschen Charakterisierung der Brownschen Bewegung, siehe Übung 10.1, ist W bezüglich $\mathfrak{G}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0.

Satz III.3 zeigt

$$X_t=\int_0^t \sigma(X_s)\,\sigma(X_s)\,dX_s=\int_0^t\sigma(X_s)\,dW_s.$$

Also „löst“ X die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t=\sigma(X_t)\,dW_t,\qquad X_0=0. \tag{10}$$

Genauer: konstruiere zu W und $\xi=0$ auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ die Filtration $\mathfrak{F}$ wie anfangs dieses Abschnittes beschrieben. Dann

$$\begin{aligned}&X \text{ starke Lösung von (10) basierend auf } (\Omega,\mathfrak{A},P),\ W \text{ und } \xi\\ \Leftrightarrow\ &X \text{ an } \mathfrak{F} \text{ adaptiert.}\end{aligned}$$

Wir wissen jedoch nur $\mathfrak{F}_t^W\subset\mathfrak{G}_t$ und somit $\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{G}_t$, sowie $\mathfrak{F}_t^X\subset\mathfrak{G}_t$.

Es gilt in jeder Situation (a)–(c), daß (10) keine starke Lösung besitzt.

Annahme: beliebiger Prozeß X sei starke Lösung von (10). Die Lévysche Charakterisierung zeigt, daß X Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}$ ist, und es gilt[9]

$$W_t=\int_0^t\sigma(X_s)\,dX_s=|X_t|-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\,\varepsilon}\lambda\{s\in[0,t]:|X_s|\le\varepsilon\}\qquad P\text{-f.s.},$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 205). Also

$$\mathfrak{F}_t^W\subset\mathfrak{F}_t^{|X|},$$

und deshalb

$$\mathfrak{F}_t^X\subset\mathfrak{F}_t\subset\sigma(\mathfrak{F}_t^{|X|}\cup\mathfrak{N}),$$

wobei $\mathfrak{N}$ die Menge der Nullmengen in $(\Omega,\mathfrak{F}_\infty,P)$ bezeichnet. Also ist X nicht starke Lösung von (10).

[9] Lokalzeit der Brownschen Bewegung in 0.

Definition 5. Ein Tripel $((\Omega, \mathfrak{A}, P),\ \mathfrak{F},\ (W, X))$ heißt *schwache Lösung* einer stochastischen Differentialgleichung mit Driftkoeffizient μ und Diffusionskoeffizient σ, falls

(i) $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Filtration in $\mathfrak{A}$, die den üblichen Voraussetzungen genügt,

(ii) W Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}$,

(iii) Forderungen (i)–(iv) aus Definition 1 sind erfüllt mit $\xi = X_0$.

Bemerkung 1. Schwache Lösung in Beispiel 4: $((\Omega, \mathfrak{A}, P),\ (\mathfrak{G}_t)_{t\in I},\ (W, X))$.

Gegeben: $(\Omega^\ell, \mathfrak{A}^\ell, P^\ell)$, W^ℓ, und ξ^ℓ mit den Eigenschaften (a)–(c) für $\ell = 1, 2$. Betrachte die Verteilungen $P^\ell_{X^\ell}$ von starken Lösungen X^ℓ auf $(C(I)^d, (\mathfrak{B}(C(I)))^d)$.

Satz 3.

$$\begin{array}{cc} P^1_{\xi^1} = P^2_{\xi^2} \ \wedge\ E^1\|\xi^1\|^2 < \infty \ \wedge\ \text{glob. Lipschitz- und lin. W'tumsbed. für } \mu \text{ und } \sigma \\ \Rightarrow \qquad\qquad P^1_{X^1} = P^2_{X^2}. \end{array}$$

Beweisskizze. Für die Approximationen $X^{\ell,n}$ nach Picard-Lindelöf zeigt man induktiv: $P^1_{(W^1,X^{1,n})} = P^2_{(W^2,X^{2,n})}$. Klar: $P^\ell_{X^{\ell,n}}$ konvergiert schwach gegen $P^\ell_{X^\ell}$. Verwende Proposition II.6. □

Siehe Karatzas, Shreve (1999, Sec. 5.3, 5.4) zur Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen.

2 Starke Lösungen als Diffusionsprozesse

Gegeben: $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, W und ξ gem. (a)–(c) sowie Drift- und Diffusionskoeffizienten μ und σ. Erfüllt seien die globale Lipschitz- und die lineare Wachstumsbedingung für μ und σ sowie $E\|\xi\|^2 < \infty$.
Im folgenden: $0 \le s < t$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Setze

$$\mathfrak{F}^s_t = \sigma\big(\sigma(\{W_v - W_u : s \le u < v \le t\}) \cup \{A \in \mathfrak{F}_\infty : P(A) = 0\}\big).$$

Betrachte die starken Lösungen von

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \qquad t \ge 0, \\ X_0 &= \xi \end{aligned} \tag{11}$$

und[10]

$$\begin{aligned} dX^{s,x}_t &= \mu(t, X^{s,x}_t)\, dt + \sigma(t, X^{s,x}_t)\, dW_t, \qquad t \ge s, \\ X^{s,x}_s &= x. \end{aligned} \tag{12}$$

[10] Rückführung auf (1), (2) durch $\mu(t, y) = 0$ und $\sigma(t, y) = 0$ für $t < s$ sowie $\xi = x$.

Beispiel 5. Für $r = d$, $\mu = 0$ und $\sigma = \mathrm{Id}_d$ gilt

$$X_t^{s,x} = x + W_t - W_s, \qquad t \geq s.$$

Wir zeigen zunächst, daß X ein Markov-Prozeß ist und bedingte Erwartungen bzgl. X gegeben $X_s = x$ Erwartungen bzgl. $X^{s,x}$ sind.

Lemma 2. $\mathfrak{F}_s$, $\mathfrak{F}_t^s$ sind unabhängig.

Beweis. Klar. □

Lemma 3. Für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$X_t^{s,X_s(\omega)}(\omega) = X_t(\omega).$$

Beweis. Folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung von (11). □

Lemma 4. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^d, \qquad (x, \omega) \mapsto X_t^{s,x}(\omega)$$

ist $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{F}_t^s)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$-meßbar.

Beweis. Siehe Elliott (1982, Lemma 14.14). □

Definition 6. Die *Übergangswahrscheinlichkeiten* zu (11) sind definiert durch

$$p(s, x, t, A) = P(\{X_t^{s,x} \in A\}), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d).$$

Lemma 5. $p(s, \cdot, t, \cdot)$ ist ein Markov-Kern auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

Beweis. Folgt mit Lemma 4. □

Lemma 6. Sei

$$f : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$$

beschränkt und $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{F}_t^s)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar, und sei

$$Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

$\mathfrak{F}_s$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ meßbar. Dann gilt

$$E(f(Y(\cdot), \cdot) \,|\, \mathfrak{F}_s) = g \circ Y,$$

wobei

$$g(y) = \int_\Omega f(y, \omega) \, dP(\omega).$$

Beweis. Algebraische Induktion, Dynkin-System. Verwende Lemma 2. □

Satz 4. $(X_t)_{t \in I}$ ist ein Markov-Prozeß bzgl. $\mathfrak{F}$, und es gilt

$$P(\{X_t \in A\} \,|\, \mathfrak{F}_s) = p(s, X_s, t, A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d).$$

Beweis. Für

$$f(x,\omega) = 1_A(X_t^{s,x}(\omega)), \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ \omega \in A,$$

und $Y = X_s$ sind wegen Lemma 4 die Annahmen von Lemma 6 erfüllt. Für die entsprechende Funktion g ergibt sich

$$g(x) = \int_\Omega 1_A(X_t^{s,x}(\omega))\, dP(\omega) = P(\{X_t^{s,x} \in A\}) = p(s,x,t,A),$$

und Lemma 3 sichert

$$f(Y(\omega),\omega) = 1_A(X_t(\omega)).$$

Fazit

$$P(\{X_t \in A\} \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(f(Y(\cdot),\cdot) \,|\, \mathfrak{F}_s) = p(s,X_s,t,A).$$

□

Beispiel 6. In der Situation von Beispiel 5 gilt für $s < t$

$$p(s,x,t,A) = (2\pi\,(t-s))^{-d/2} \int_A \exp\left(-\tfrac{|u-x|^2}{2\,(t-s)}\right)\, du,$$

wobei $|\cdot|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Siehe Übung 6.2 für den Fall $r = d = 1$, $\mu(t,x) = x/2$ und $\sigma(t,x) = x$.

Bemerkung 2. Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F}$ und $\mathbb{R}^d$-wertigem Markov-Prozeß Y bzgl. $\mathfrak{F}$. Dann existieren Markov-Kerne $p(s,\cdot,t,\cdot)$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$, so daß für P_{Y_s}-fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\forall\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d): \quad P(\{Y_t \in A\} \,|\, Y_s = x) = p(s,x,t,A).$$

Eindeutigkeit P_{Y_s}-fast sicher. Bez. *Übergangswahrscheinlichkeiten*. Für $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $E(|f \circ Y_t|) < \infty$ ergibt sich

$$E(f \circ Y_t \,|\, Y_s = x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, p(s,x,t,dy). \tag{13}$$

Siehe: Wahrscheinlichkeitstheorie, reguläre bedingte Warscheinlichkeiten.
Für $0 \le r \le s \le t$ und $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*

$$p(r,x,t,A) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s,y,t,A)\, p(r,x,s,dy),$$

Beweis Übung 11.3. Siehe Übung 5.2 zur Konstruktion von Markov-Prozessen mit gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten.
Im Spezialfall (11) lautet die Gleichung (13)

$$E(f \circ X_t \,|\, X_s = x) = E(f \circ X_t^{s,x}). \tag{14}$$

Satz 5. Gelte $E\|\xi\|^{2m} < \infty$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert für jedes $T > 0$ eine Konstante $c > 0$ mit

$$\forall\ s,t \in [0,T]: \quad E\|X_t - X_s\|^{2m} \le c \cdot |t-s|^m$$

und

$$E\left(\max_{0 \le t \le T} \|X_t\|^{2m}\right) \le c.$$

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 306). $\square$

Wir studieren nun lokale Eigenschaften von X. Im folgenden: Erwartungswerte von vektor- bzw. matrixwertigen Zufallsvariablen komponentenweise definiert.

Satz 6. Sind μ und σ stetig, so folgt

$$\lim_{t\to s+} \frac{1}{(t-s)^n} \cdot P(\{\|X_t^{s,x} - x\| > \varepsilon\}) = 0 \tag{15}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ sowie

$$\lim_{t\to s+} \frac{1}{t-s} \cdot E(X_t^{s,x} - x) = \mu(s,x) \tag{16}$$

und

$$\lim_{t\to s+} \frac{1}{t-s} \cdot E((X_t^{s,x} - x) \cdot (X_t^{s,x} - x)^T) = a(s,x), \tag{17}$$

wobei

$$a = \sigma \cdot \sigma^T : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}.$$

Beweis. Wähle $m > n$, beachte

$$P(\{\|X_t^{s,x} - x\| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2m}} \cdot E\|X_t^{s,x} - X_s^{s,x}\|^{2m},$$

und verwende Satz 5, um (15) zu erhalten.

Es gilt

$$E(X_t^{s,x} - x) = E\left(\int_s^t \mu(u, X_u^{s,x})\, du\right) \tag{18}$$

sowie aufgrund der Stetigkeit von μ

$$\lim_{t\to s+} \frac{1}{t-s} \cdot \int_s^t \mu(u, X_u^{s,x})\, du = \mu(s,x).$$

Deshalb gilt (16), falls $\frac{1}{t-s} \cdot \int_s^t \mu_i(u, X_u^{s,x})\, du$ eine gleichgradig integrierbare Familie von Zufallsvariablen ist. Letzteres ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{t-s} \cdot \int_s^t \mu_i(u, X_u^{s,x})\, du\right)^2 &\leq \frac{1}{t-s} \cdot \int_s^t \mu_i^2(u, X_u^{s,x})\, du \\ &\leq \frac{K}{t-s} \cdot \int_s^t (1 + \|X_u^{s,x}\|^2)\, du\end{aligned}$$

und (4).

Zum Beweis von (17) ist Proposition 1 hilfreich, siehe Friedman (1975, p. 116). $\square$

Bemerkung 3. In Verbindung mit (14) zeigt Satz 6

$$E\left(X_t^{(i)} - x_i \,|\, X_s = x\right) = \mu_i(s,x) \cdot (t-s) + o(t-s)$$

und

$$E\left((X_t^{(i)} - x_i) \cdot (X_t^{(j)} - x_j) \,|\, X_s = x\right) = a_{i,j}(s,x) \cdot (t-s) + o(t-s).$$

Betrachte in diesem Lichte exemplarisch die Brownsche Bewegung, den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß und die geometrische Brownsche Bewegung.

Definition 7. $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozeß X heißt[11] *Diffusionsprozeß* mit *Driftkoeffizient* b :

[11] Terminologie nicht einheitlich.

$I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und *Kovarianzkoeffizient* $a : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, falls gilt

(i) X besitzt stetig Pfade,

(ii) X ist Markov-Prozeß (bzgl. $\mathfrak{F}^X$),

(iii) die Übergangswahrscheinlichkeiten p von X erfüllen für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_{\{\|y-x\|>\varepsilon\}} p(s,x,t,dy) = o(t-s),$$

$$\int_{\{\|y-x\|\leq\varepsilon\}} (y-x)\, p(s,x,t,dy) = b(s,x)\cdot(t-s) + o(t-s),$$

$$\int_{\{\|y-x\|\leq\varepsilon\}} (y-x)\cdot(y-x)^T\, p(s,x,t,dy) = a(s,x)\cdot(t-s) + o(t-s).$$

Satz 7. Sind μ und σ stetig, so ist die starke Lösung von (11) ein Diffusionsprozess mit Driftkoeffizient

$$b = \mu \tag{19}$$

und Kovarianzkoeffizient

$$a = \sigma \cdot \sigma^T. \tag{20}$$

Beweis. Folgt aus den Sätzen 4, 5 und 6 sowie

$$\int_{\{\|y-x\|>\varepsilon\}} \|y-x\|^2 p(s,x,t,dy) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot \int_{\mathbb{R}^d} \|y-x\|^4 p(s,x,t,dy).$$

□

Umkehrung von Satz 7: Darstellung von Diffusionsprozessen als starke bzw. schwache Lösung von stochastischen Differentialgleichungen. Siehe Gihman, Skorohod (1979, Thm. III.1.10) und Rogers, Williams (2000, Chap. V).

Bez.: $C^{1,2}$ Raum der stetigen Abbildungen $u : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ auf $]0,\infty[\, \times \mathbb{R}^d$ besitzen, welche stetig auf $I \times \mathbb{R}^d$ fortsetzbar sind.

Betrachte den Differentialoperator

$$Lu = \tfrac{1}{2}\cdot \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{21}$$

Im folgenden: a und b gemäß (19) und (20) gewählt.

Beispiel 7. Für $r = d$, $\mu = 0$ und $\sigma = \mathrm{Id}_d$ (d-dimensionale Brownsche Bewegung) gilt

$$(Lu)(t,x) = \tfrac{1}{2}\cdot \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) = \tfrac{1}{2}\cdot (\Delta u(t,\cdot))(x).$$

Nun $r = d = 1$ und $\mu(t,x) = \widetilde{\mu}\cdot x$. Für $\sigma = 1$ (Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß) gilt

$$(Lu)(t,x) = \tfrac{1}{2}\cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \widetilde{\mu}\cdot x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$

Für $\sigma(t,x) = \widetilde{\sigma} \cdot x$ (geometrische Brownsche Bewegung) gilt

$$(Lu)(t,x) = \tfrac{1}{2} \cdot \widetilde{\sigma}^2 \cdot x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \widetilde{\mu} \cdot x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$

Proposition 1. Für $u \in C^{1,2}$ gilt

$$u(t,X_t) = u(s,X_s) + \int_s^t \left(Lu + \frac{\partial u}{\partial t} \right)(\tau, X_\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^d \int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(\tau, X_\tau)\, dM_\tau^{(i)},$$

wobei

$$M^{(i)} = \sum_{\ell=1}^r M^{(i,\ell)} \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$$

mit

$$M_t^{(i,\ell)} = \int_0^t \sigma_{i,\ell}(s,X_s)\, dW_s^{(\ell)}, \qquad t \geq 0.$$

Beweis. Durch

$$Z_t^{(i)} = \mu_i(t,X_t), \qquad t \geq 0,$$

wird ein progressiv meßbarer, pfadweise lokal integrierbarer Prozeß definiert. Somit definiert

$$B_t^{(i)} = \int_0^t Z_s^{(i)}\, ds, \qquad t \geq 0,$$

einen adaptierten, pfadweise lokal absolut-stetigen Prozeß. Aus (4) folgt $M^{(i,\ell)} \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$. Schließlich sichern Satz III.2 und Proposition I.10

$$\begin{aligned} \langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_t &= \sum_{\ell,m=1}^r \langle M^{(i,\ell)}, M^{(j,m)} \rangle_t = \sum_{\ell,m=1}^r \int_0^t \sigma_{i,\ell}(s,X_s) \cdot \sigma_{j,m}(s,X_s)\, d\langle W^{(\ell)}, W^{(m)} \rangle_s \\ &= \sum_{\ell=1}^r \int_0^t \sigma_{i,\ell}(s,X_s) \cdot \sigma_{j,\ell}(s,X_s)\, ds = \int_0^t a_{i,j}(s,X_s)\, ds. \end{aligned}$$

Wende die Ito-Formel an, siehe Übung 11.4. □

Bemerkung 4. Nach Proposition 1 definiert

$$u(t,X_t) - u(0,X_0) - \int_0^t \left(Lu + \frac{\partial u}{\partial t} \right)(\tau, X_\tau)\, d\tau$$

ein lokales Martingal und etwa im Falle beschränkter Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sogar ein Martingal. Dies führt zu einer abstrakteren Definition von Diffusionsprozessen, siehe Rogers, Williams (2000, p. 111). Die Wahl von $u(t,x) = x_i$ liefert (18), und $u(t,x) = x_i \cdot x_j$ wird im Beweis von (17) verwendet.

Definition 8. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *polynomial beschränkt*, falls

$$\exists\, k \in \mathbb{N}_0 : \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{1 + \|x\|^k} < \infty.$$

Betrachte die elliptischen Differentialoperatoren

$$L_s f = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(s,\cdot) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(s,\cdot) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

vgl. (21) und siehe Beispiel 7.

Satz 8. Sei f zweimal stetig differenzierbar mit polynomial beschränkten zweiten Ableitungen. Ferner seien μ und σ stetig. Dann

$$E(f(X_t^{s,x}) - f(x)) = E\left(\int_s^t L_\tau f(X_\tau^{s,x}) \, d\tau \right)$$

und

$$\lim_{t \to s+} \frac{1}{t-s} \cdot E(f(X_t^{s,x}) - f(x)) = (L_s f)(x).$$

Beweis. Beachte, daß auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (und f) polynomial beschränkt sind. Die erste Identität folgt aus Proposition 1 mit $u(t,x) = f(x)$ und $X = X^{s,x}$. Fahre fort wie im Beweis von Satz 6. □

Bemerkung 5. Betrachte die autonome Gleichung[12]

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t, \qquad t \geq 0, \\ X_0 &= \xi, \end{aligned} \tag{22}$$

wobei μ und σ die globale Lipschitzbedingung erfüllen. Für die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten gilt

$$p(s,x,t,\cdot) = p(0,x,t-s,\cdot),$$

und wir setzen deshalb

$$p(t,x,\cdot) = p(0,x,t,\cdot).$$

Definiere stetige lineare Operatoren

$$T_t : B \to B$$

auf dem Raum B der beschränkten Borel-meßbaren Abbildungen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $T_0 = \mathrm{id}$ und

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, p(t,x,dy) = E(f \circ X_t \mid X_0 = x)$$

[12] Rückführung einer nicht-autonomen Gleichung $d\widetilde{X}_t = \widetilde{\mu}(t,X_t)\,dt + \widetilde{\sigma}(t,X_t)\,dW_t$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$ auf den autonomen Fall: für $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^d$ und $t \in I$ setzt man

$$x = \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mu(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}(\widetilde{x},t) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \sigma(x) = \begin{pmatrix} \sigma(\widetilde{x},t) \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times r}$$

sowie

$$\xi = \begin{pmatrix} \widetilde{\xi} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad X_t = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

für $t > 0$. Klar:

$$T_t 1_A = p(t, \cdot, A), \qquad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d),$$

und die Chapman-Kolmogorov-Gleichung sichert

$$T_t \circ T_s = T_{s+t}.$$

Man bezeichnet $(T_t)_{t \geq 0}$ als *Halbgruppe der Übergangsoperatoren* des Markov-Prozesses X. Nach Satz 8 gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t} = (\mathcal{L} f)(x)$$

für

$$\mathcal{L} f = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Man bezeichnet $\mathcal{L}$ als *infinitesimalen Generator* der Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$.

3 Parabolische und stochastische Differentialgleichungen

Fixiere $T > 0$.
Bez.: $C_T^{1,2}$ Raum der stetigen Abbildungen $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, deren partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ auf $]0, T[\times \mathbb{R}^d$ existieren, stetig sind und stetige Fortsetzungen auf $[0, T[\times \mathbb{R}^d$ besitzen.
Betrachte den Differentialoperator L aus (21) mit

$$\forall\ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d : \quad a(t, x) \text{ symmetrisch, nichtnegativ definit,}$$

und eine stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

Gesucht ist eine Lösung

$$u \in C_T^{1,2}$$

der (rückwärts) parabolischen Differentialgleichung

$$Lu = -\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{auf } [0, T[\times \mathbb{R}^d \tag{23}$$

mit Endbedingung

$$u(T, \cdot) = \varphi. \tag{24}$$

Definition 9. $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *polynomial beschränkt auf* $J \times \mathbb{R}^d$ für $J \subset [0, T]$, falls

$$\exists\ k \in \mathbb{N}_0 : \qquad \sup_{(t,x) \in J \times \mathbb{R}^d} \frac{|u(t, x)|}{1 + \|x\|^k} < \infty.$$

Zu $a : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ wählen wir $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times r}$ mit $a = \sigma \cdot \sigma^T$ und setzen $\mu = b$. Im folgenden vorausgesetzt: μ und σ sind stetig und erfüllen die globale Lipschitzbedingung. Wir betrachten die durch (12) definierten Diffusionsprozesse $(X_t^{s,x})_{t\in[s,T]}$ für $0 \le s \le T$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Beispiel 8. Für $a = \sigma = \mathrm{Id}_d$ und $b = \mu = 0$ ist (23) die Wärmeleitungsgleichung

$$\tfrac{1}{2} \cdot \Delta u = -\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{auf } [0,T[\, \times \mathbb{R}^d$$

mit Zeitumkehr. Ferner gilt $X_t^{s,x} = x + W_t - W_s$, d.h. $X^{s,x}$ ist eine zur Zeit s in x startende d-dimensionale Brownsche Bewegung. Ist φ polynomial beschränkt, so definiert bekanntlich (oder infolge der Sätze 9 und $\boxed{??}$)

$$u(s,x) = (2\pi\,(T-s))^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \cdot \exp\left(-\tfrac{|y-x|^2}{2\,(T-s)}\right) dy, \qquad (s,x) \in [0,T[\, \times \mathbb{R}^d,$$

die eindeutig bestimmte auf $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ polynomial beschränkte Lösung von (23), (24). Beachte, daß $u(s,x) = E(\varphi \circ X_T^{s,x})$. Dieser Zusammenhang gilt allgemein.

Satz 9. Sei u eine auf $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ polynomial beschränkte Lösung von (23), (24). Dann

$$\forall\ (s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d : \quad u(s,x) = E(\varphi \circ X_T^{s,x}).$$

Beweis. Proposition 1 zeigt für $0 \le s < t < T$ und $x \in \mathbb{R}^d$

$$u(t, X_t^{s,x}) = u(s,x) + N_t$$

mit einem stetigen lokalen Martingal N. Betrachte die Stoppzeiten

$$T_n = \inf\{\tau \ge s : \|X_\tau\| \ge n\} \wedge T.$$

Aufgrund der Stetigkeit von a und $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ folgt

$$E(N_{t\wedge T_n}) = 0.$$

Also

$$u(s,x) = E(u(t \wedge T_n, X_{t\wedge T_n}^{s,x})).$$

Die Wachstumsbedingung für u sichert

$$|u(t \wedge T_n, X_{t\wedge T_n}^{s,x})| \le c \cdot (1 + n^k)$$

mit Konstanten $c > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$, und aufgrund der Stetigkeit von u und X folgt

$$u(s,x) = E(u(T_n, X_{T_n}^{s,x}))$$

mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz. Die Wachstumsbedingung für φ und der Lebesguesche Grenzwertsatz liefern

$$\lim_{n\to\infty} E\left(u(T_n, X_{T_n}^{s,x}) \cdot 1_{\{T_n = T\}}\right) = E(\varphi \circ X_T^{s,x}).$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} E\left(u(T_n, X^{s,x}_{T_n}) \cdot 1_{\{T_n<T\}}\right) &\le c \cdot (1+n^k) \cdot P(\{T_n < T\}) \\ &\le c \cdot (1+n^k) \cdot P(\{\sup_{s\le\tau\le T} \|X_\tau\| \ge n\}) \\ &\le c \cdot (1+n^k) \cdot n^{-\ell} \cdot E(\sup_{s\le\tau\le T} \|X_\tau\|^\ell) \end{aligned}$$

für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Wähle $\ell > k$ und verwende Satz 5, um

$$\lim_{n\to\infty} E(u(T_n, X^{s,x}_{T_n}) \cdot 1_{\{T_n<T\}}) = 0$$

zu erhalten. □

Bemerkung 6. Satz 9 zeigt, daß jede polynomial beschränkte Lösung von (23), (24) eine stochastische Darstellung besitzt. Der Eindeutigkeitssatz 3 sichert, daß die Verteilung von $X^{s,x}$ nur von s und x sowie von μ und σ abhängt. Also haben wir mit probabilistischen Methoden gezeigt, daß (23), (24) für jede polynomial beschränkte Abbildung φ höchstens eine polynomial beschränkte Lösung besitzt.

Ein klassischer Text zur Analyse parabolischer Gleichungen mit deterministischen Methoden ist Friedman (1964).

Bemerkung 7. Falls a und b gewissen Glattheits- und Wachstumsbedingungen genügen, existiert eine Abbildung

$$\Gamma : \left\{(s,x,t,y) \in ([0,T]\times\mathbb{R}^d)^2 : s < t\right\} \to \mathbb{R},$$

so daß

$$\forall\ (t,y) \in \,]0,T] \times \mathbb{R}^d : \quad L\Gamma(\cdot,\cdot,t,y) = -\frac{\partial\Gamma(\cdot,\cdot,t,y)}{\partial s} \tag{25}$$

und für jede polynomial beschränkte Funktion φ

$$\lim_{s\to t-} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\cdot\Gamma(s,x,t,y)\,dy = \varphi(x)$$

gilt. Die Abbildung Γ heißt *Fundamentallösung* zu (23), und (25) heißt *Kolmogorov-Rückwärtsgleichung*. Man erhält zu jeder polynomial beschränkten Abbildung φ durch

$$u(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\cdot\Gamma(s,x,T,y)\,dy, \qquad (s,x) \in [0,T[\, \times \mathbb{R}^d,$$

eine auf $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ polynomial beschränkte Lösung von (23), (24). Siehe Friedman (1964, Chap. 1).

Fazit: unter den o.n.g. Voraussetzungen ist $\Gamma(s,x,t,\cdot)$ die Dichte der Verteilung von $X^{s,x}_t$.

Beispiel 9. Die Übergangsdichten der d-dimensionalen Brownschen Bewegung bilden eine Fundamentallösung für $L = \frac{1}{2}\cdot\Delta$.

Satz 10 (Feynman-Kac-Formel)**.** Seien

$$h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty[$$

und

$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

stetig. Ferner seien g und die Lösung $u \in C_T^{1,2}$ von

$$Lu + g = -\frac{\partial u}{\partial t} + h \cdot u \qquad \text{auf } [0,T[\times \mathbb{R}^d$$

und

$$u(T,\cdot) = \varphi$$

auf $[0,T] \times \mathbb{R}$ polynomial beschränkt. Dann gilt für $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} u(s,x) = E\Bigg(&\varphi(X_T^{s,x}) \cdot \exp\left(-\int_s^T h(t, X_t^{s,x})\,dt\right) \\ &+ \int_s^T g(t, X_t^{s,x}) \cdot \exp\left(-\int_s^t h(\tau, X_\tau^{s,x})\,d\tau\right)\,dt\Bigg). \end{aligned}$$

Beweis. Ähnlich dem von Satz 9. Siehe Karatzas, Shreve (1999, Thm. 5.7.6). □

Nun: eine Existenzaussage mit probabilistischen Methoden.