Kapitel III

Stochastische Integration

Literatur:

Karatzas, Shreve (1999, Chap. 3).

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration[1] $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ für $I = [0, \infty[$, die den üblichen Voraussetzungen genügt, sowie Prozesse $X = (X_t)_{t \in I}$ und $M = (M_t)_{t \in I} \in \mathfrak{M}_2^c$.
Speziell: $M = W$ eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0.

1 Konstruktion des stochastischen Integrals

Die Sätze I.11 und I.12 zeigen in nichttrivialen Fällen[2] für alle $t > 0$: P-f.s. ist M von unbeschränkter Variation auf $[0, t]$. Somit ist eine pfadweise Definition von stochastischen Integralen

$$I_t(X)(\omega) = \int_0^t X_u(\omega)\, dM_u(\omega), \qquad t \in I,\ \omega \in \Omega,$$

i.a. nicht möglich.

1.1 Integral für einfache Prozesse

Definition 1. X *einfach*, falls

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega) \cdot 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{1}$$

mit

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots, \qquad \lim_{i \to \infty} t_i = \infty$$

[1] Im folgenden Adaptiertheit und Martingaleigenschaft stets bzgl. dieser Filtration.
[2] Insbesondere für $M = W$.

und Zufallsvariablen ξ_i auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so daß

$$\sup_{\omega\in\Omega}\sup_{i\in\mathbb{N}_0} |\xi_i(\omega)| < \infty$$

und

$$\forall\ i \in \mathbb{N}_0 : \quad \xi_i\ \mathfrak{F}_{t_i}\text{-meßbar.}$$

Bez.: $\mathfrak{L}_0$ Vektorraum der einfachen Prozesse. *Stochastisches Integral* von X gem. (1) bzgl. M auf $[0, t]$:

$$I_t(X)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(\omega) \cdot (M_{t_{i+1}}(\omega) - M_{t_i}(\omega)) + \xi_n(\omega) \cdot (M_t(\omega) - M_{t_n}(\omega)),$$

falls $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

Also kurz

$$I_t(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \xi_i \cdot (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}).$$

Lemma 1. Sei $A = (A_t)_{t\in I}$ stetig und wachsend. Dann sind äquivalent

(i) $\forall\ 0 \le s < t : \quad E((M_t - M_s)^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(A_t - A_s \,|\, \mathfrak{F}_s)$,

(ii) $A = \langle M \rangle$.

Beweis. „(ii) $\Rightarrow$ (i)“ siehe Beweis von Satz I.11.
„(i) $\Rightarrow$ (ii)“: folgt aus

$$E(M_t^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) - M_s^2 = E((M_t - M_s)^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(A_t \,|\, \mathfrak{F}_s) - A_s$$

und der Eindeutigkeitsaussage für die Doob-Meyer-Zerlegung von M^2. □

Proposition 1.

(i) $I_t(\cdot)$ ist wohldefiniert und linear auf $\mathfrak{L}_0$,

(ii) für $X \in \mathfrak{L}_0$ gilt $(I_t(X))_{t\in I} \in \mathfrak{M}_2^c$ und[3]

$$\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u,$$

(iii) für $X \in \mathfrak{L}_0$ gilt

$$E(I_t(X)^2) = E\left(\int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u\right).$$

[3]Das rechts stehende Integral ist pfadweise definiert.

Beweis. ad (i): klar.
ad (ii): Für $0 \leq s < t$ und $i \in \mathbb{N}_0$ gilt[4]

$$E(\xi_i \cdot (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}) \,|\, \mathfrak{F}_s) = \xi_i \cdot (M_{s\wedge t_{i+1}} - M_{s\wedge t_i}).$$

Hiermit folgt die Martingaleigenschaft von $I(X)$, und jetzt ist klar: $I(X) \in \mathfrak{M}_2^c$.
Durch

$$A_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u$$

wird offenbar ein wachsender stetiger Prozeß definiert. Zu zeigen bleibt die Martingaleigenschaft von $I(X)^2 - A$. Gelte $s \in [t_{m-1}, t_m[$ und $t \in [t_n, t_{n+1}[$, also $m - 1 \leq n$.
1. Fall: $m - 1 < n$. Dann

$$\begin{aligned} &I_t(X) - I_s(X) \\ &\quad = \xi_{m-1} \cdot (M_{t_m} - M_s) + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i \cdot (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_n \cdot (M_t - M_{t_n}). \end{aligned}$$

Gelte $0 \leq s < t \leq u < v$ und sei Y beschränkt und $\mathfrak{F}_u$-meßbar. Dann

$$E(Y \cdot (M_v - M_u) \cdot (M_t - M_s) \,|\, \mathfrak{F}_u) = 0.$$

Mit Lemma 1 folgt

$$\begin{aligned} &E((I_t(X) - I_s(X))^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) \\ &= E\left(\xi_{m-1}^2 \cdot (M_{t_m} - M_s)^2 + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i^2 \cdot (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \xi_n^2 \cdot (M_t - M_{t_n})^2 \,|\, \mathfrak{F}_s\right) \\ &= E\left(\xi_{m-1}^2 \cdot (\langle M\rangle_{t_m} - \langle M\rangle_s) + \sum_{i=m}^{n-1} \xi_i^2 \cdot (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i}) + \xi_n^2 \cdot (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_n}) \,|\, \mathfrak{F}_s\right) \\ &= E\left(\int_s^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_s\right) = E(A_t - A_s \,|\, \mathfrak{F}_s). \end{aligned} \tag{2}$$

Wende nochmals Lemma 1 an.
2. Fall: $m - 1 = n$. Einfacher.
ad (iii): Wähle $s = 0$ und integriere (2). □

1.2 Fortsetzung des Integrals

Wir definieren zunächst I für eine Klasse von Prozessen, die $\mathfrak{L}_0$ umfaßt, wobei insbesondere die Eigenschaften aus Proposition 1 erhalten bleiben.
Betrachte das durch

$$\mu_M(A) = \int_\Omega \int_0^\infty 1_A(u, \omega) \, d\langle M\rangle_u(\omega) \, dP(\omega)$$

[4] Fallunterscheidung; siehe auch Übung 3.2.

definierte[5] Maß[6] μ_M auf $(I \times \Omega, \mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A})$. Im Spezialfall $M = W$ erhält man

$$\mu_W = \lambda \otimes P,$$

wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet.

Definition 2. Sei X meßbar und adaptiert. Setze[7]

$$[X]_t^2 = E\left(\int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u\right)$$

sowie

$$[X] = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t} \cdot (1 \wedge [X]_t).$$

Bezeichne mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(M)$ und $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}^*(M)$ die Vektorräume der (μ_M-Äquivalenzklassen von) meßbaren adaptierten bzw. progressiv meßbaren Prozesse X mit $[X]_t < \infty$ für alle $t \in I$.

Klar

$$\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{L}.$$

Wir betrachten fortan stets die durch $[X - Y]$ definierte Metrik auf $\mathfrak{L}$.

Lemma 2. Sei X meßbar, adaptiert und beschränkt durch $c \geq 0$. Dann existiert eine Folge $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von durch c beschränkten Prozessen in $\mathfrak{L}_0$ mit

$$\forall\, t \in I: \quad \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^t (X_u - X_u^{(n)})^2 \, du\right) = 0.$$

Beweis.
1. Fall: X stetig. Interpolation durch Treppenfunktionen, Lebesguescher Grenzwertsatz.
2. Fall: X progressiv meßbar. Setze[8]

$$Y_s(\omega) = \int_0^{s\wedge t} X_u(\omega)\, du, \qquad Z_s^{(m)}(\omega) = m \cdot \big(Y_s(\omega) - Y_{(s-1/m)\vee 0}(\omega)\big)$$

für $m \in \mathbb{N}$. Es gilt: Y, $Z^{(m)}$ sind stetig, adaptiert, und damit progressiv meßbar, und $Z^{(m)}$ ist beschränkt durch c. Der Lebesguesche Differentiationssatz sichert

$$\forall\, \omega \in \Omega: \left(\lim_{m\to\infty} Z_\cdot^{(m)}(\omega) = X_\cdot(\omega) \quad \lambda\text{-f.s.}\right),$$

und deshalb

$$\lim_{m\to\infty} Z^{(m)} = X \quad \lambda \otimes P\text{-f.s.}$$

[5] μ_M ist wohldefiniert, siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. 1.8) oder Übung 8.2.

[6] *Previsible* σ-Algebra $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A}$: erzeugt von Mengen der Form $]s,t] \times B$ mit $B \in \mathfrak{F}_s$ sowie $\{0\} \times B$ mit $B \in \mathfrak{F}_0$. Einfache Prozesse sind $\mathfrak{P}$-meßbar; $\mathfrak{P}$-meßbare Prozesse sind progressiv meßbar. Siehe Irle (1998, p. 170). *Doléans-Maß*: Einschränkung von μ_M auf $\mathfrak{P}$.

[7] $[X]_t$ ist L_2-Norm von $1_{[0,t]} \cdot X$ bzgl. μ_M.

[8] Notation: $\vee$ für max.

Mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^t (X_u - Z_u^{(m)})^2\,du\right) = 0.$$

Approximiere $Z^{(m)}$ geeignet gemäß Fall 1.).
3. Fall: X meßbar, adaptiert. Wir zeigen, daß Y wiederum adaptiert ist. Jeder Prozeß X wie oben besitzt eine progressiv meßbare Modifikation $\widetilde{X}$, siehe Karatzas, Shreve (1999, Prop. I.1.12). Wir zeigen, daß durch

$$\widetilde{Y}_s(\omega) = \int_0^{s\wedge t} \widetilde{X}_u(\omega)\,du, \qquad s \in I,$$

eine Modifikation des oben definierten Prozesses Y gegeben ist. Betrachte den adaptierten meßbaren Prozeß

$$\eta_s(\omega) = 1_{\{X_s \neq \widetilde{X}_s\}}(\omega), \qquad s \in I.$$

Es gilt

$$E\left(\int_0^t \eta_u\,du\right) = \int_0^t E(\eta_u)\,du = \int_0^t P(\{X_u \neq \widetilde{X}_u\})\,du = 0$$

und somit

$$P\left(\left\{\int_0^t \eta_u\,du = 0\right\}\right) = 1.$$

Weiterhin

$$\{Y_s \neq \widetilde{Y}_s\} \subset \left\{\int_0^t \eta_u\,du > 0\right\}.$$

Also ist $\widetilde{Y}$ eine Modifikation von Y, und unter den üblichen Voraussetzungen ist mit $\widetilde{Y}$ auch Y adaptiert. Fahre fort wie im 2. Fall. □

Proposition 2. Für P-f.a. ω sei $\langle M\rangle.(\omega)$ absolutstetig bzgl. λ. Dann liegt $\mathfrak{L}_0$ dicht in $\mathfrak{L}$.

Beweis. Sei $X \in \mathfrak{L}$.
1. Fall: X beschränkt. Sei $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Lemma 2 gewählt. Dann ex. eine Teilfolge $(X^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Menge $A \in \mathfrak{B}(I)\otimes\mathfrak{A}$ mit

$$\forall\ (t,\omega) \in (I\times\Omega)\setminus A: \quad \lim_{k\to\infty} X_t^{(n_k)}(\omega) = X_t(\omega)$$

und

$$(\lambda\otimes P)(A) = 0.$$

Es folgt $\mu_M(A) = 0$, und der Lebesguesche Grenzwertsatz zeigt

$$\lim_{k\to\infty} [X - X^{(n_k)}]_t = 0$$

für alle $t \in I$.

2. Fall: X beliebig. Lokalisation. Setze

$$X_t^{(k)} = X_t \cdot 1_{\{|X_t| \le k\}}, \qquad t \in I,\ k \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\lim_{k \to \infty} [X - X^{(k)}]_t = 0.$$

Approximiere die beschränkten Prozesse $X^{(k)}$ gem. Fall 1. $\square$

Proposition 2 ist insbesondere im Falle $M = W$ anwendbar. Allgemein gilt:

Proposition 3. $\mathfrak{L}_0$ liegt dicht in $\mathfrak{L}^*$.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 135–137). $\square$

Definition 3. Für $Y \in \mathfrak{M}_2^c$ sei

$$\|Y\|_t^2 = E(Y_t^2), \qquad t \in I.$$

sowie

$$\|Y\| = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t} \cdot (1 \wedge \|Y\|_t).$$

Beachte: für $Y \in \mathfrak{M}_2^c$ ist $t \mapsto E(Y_t^2)$ monoton wachsend. Wir identifizieren im folgenden ununterscheidbare Elemente aus $\mathfrak{M}_2^c$.

Proposition 4. $\mathfrak{M}_2^c$ ist ein vollständiger metrischer Raum bzgl. der durch $(Y, Z) \mapsto \|Y - Z\|$ definierten Metrik.

Beweis. Übung 8.4. $\square$

Wir betrachten fortan stets obige Metrik auf $\mathfrak{M}_2^c$.

Satz 1. Die in Definition 1 eingeführte lineare Abbildung

$$I : \mathfrak{L}_0 \to \mathfrak{M}_2^c$$

läßt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung

$$I : \mathfrak{L}^* \to \mathfrak{M}_2^c$$

mit

$$\forall\, t \in I : \quad \|I(X)\|_t = [X]_t \tag{3}$$

fortsetzen. Es gilt wiederum

$$\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M \rangle_u.$$

Beweis. Zu $X \in \mathfrak{L}^*$ wähle man gemäß Proposition 3 eine Folge $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{L}_0$ mit $\lim_{n\to\infty}[X - X^{(n)}] = 0$. Proposition 1 zeigt

$$\|I(X^{(n)}) - I(X^{(m)})\| = \|I(X^{(n)} - X^{(m)})\| = [X^{(m)} - X^{(n)}],$$

so daß Proposition 4 die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} I(X^{(n)})$ in $\mathfrak{M}_2^c$ sichert. Wir definieren

$$I(X) = \lim_{n\to\infty} I(X^{(n)})$$

und halten fest, daß $I(X)$ nicht von der Wahl der approximierenden Folge $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt. Die Linearität von I sowie (3) sind klar. Ebenso die Eindeutigkeit der Fortsetzung.

Gelte $0 \le s < t$ und sei $A \in \mathfrak{F}_s$. Man erhält[9] unter Verwendung von (2)

$$\begin{aligned}\int_A \big(I_t(X) - I_s(X)\big)^2 \, dP &= \lim_{n\to\infty} \int_A \big(I_t(X^{(n)}) - I_s(X^{(n)})\big)^2 \, dP \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A \int_s^t \big(X_u^{(n)}\big)^2 \, d\langle M\rangle_u \, dP \\ &= \int_A \int_s^t (X_u)^2 \, d\langle M\rangle_u \, dP.\end{aligned}$$

Also gilt auch für $X \in \mathfrak{L}^*$

$$E((I_t(X) - I_s(X))^2 \,|\, \mathfrak{F}_s) = E\bigg(\int_s^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_s\bigg).$$

Wende Lemma 1 an, um $\langle I(X)\rangle_t = \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u$ zu erhalten. □

Definition 4. Für $X \in \mathfrak{L}^*$ heißt $(I_t(X))_{t\in I}$ das *stochastische Integral (Ito-Integral)* von X bzgl. M. Bez:

$$I_t(X) = I_t^M(X) = \int_0^t X_u \, dM_u.$$

Bemerkung 1. Unter den Voraussetzungen von Proposition 2 gilt Satz 1 mit $\mathfrak{L}$ statt $\mathfrak{L}^*$, so daß das stochastische Integral auf $\mathfrak{L}$ erklärt ist. Die in beiden Fällen gültige Beziehung (3) heißt *Ito-Isometrie.*

Bezeichne mit $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}^*(M)$ den Vektorraum der (μ_M-Äquivalenzklassen von) progressiv meßbaren Prozessen X mit

$$\forall\, t \in I : \quad \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Klar

$$\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{P}^*$$

und

$$X \text{ stetig, adaptiert} \quad \Rightarrow \quad X \in \mathfrak{P}^*.$$

[9] Aus $Z_n \to Z$ in L_p folgt $E(1_B \cdot Z_n^p) \to E(1_B \cdot Z^p)$.

Es gilt $\mathfrak{L}^*(W) \neq \mathfrak{P}^*(W)$, siehe Übung 9.1.b.
Ziel: Fortsetzung des stochastischen Integrals auf $\mathfrak{P}^*$. Methode: Lokalisation.
Im folgenden: $X \in \mathfrak{P}^*$. Für Stoppzeiten T sei

$$X_t^{(T)} = \begin{cases} X_t, & \text{falls } t \leq T \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 3. Für Stoppzeiten S, T gelte $X^{(S)}, X^{(T)} \in \mathfrak{L}^*$. Dann folgt für $t \in I$

$$I_{t\wedge S\wedge T}(X^{(T)}) = I_{t\wedge S\wedge T}(X^{(S)}).$$

Beweis. Für

$$Z = I(X^{(T)}) - I(X^{(S)}) = I(X^{(T)} - X^{(S)}) \in \mathfrak{M}_2^c$$

gilt

$$\langle Z\rangle_t = \int_0^t \left(X_u^{(T)} - X_u^{(S)}\right)^2 \, d\langle M\rangle_u$$

und somit

$$\langle Z\rangle_{S\wedge T} = 0.$$

Mit Übung 4.2 folgt

$$Z_{t\wedge S\wedge T} = 0.$$

□

Betrachte[10] Stoppzeitenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad T_n \leq T_{n+1}$,

(ii) P-f.s. $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$,

(iii) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad X^{(T_n)} \in \mathfrak{L}^*$.

Zu $t \in I$ und $\omega \in \{\lim_{n\to\infty} T_n = \infty\}$ wähle man $n \in \mathbb{N}$ mit $T_n(\omega) \geq t$ und setze

$$I_t(X)(\omega) = I_t(X^{(T_n)})(\omega).$$

Lemma 3 sichert die Unabhängigkeit von der Wahl von n und der Stoppzeitenfolge.

Definition 5. Für $X \in \mathfrak{P}^*$ heißt $(I_t(X))_{t\in I}$ das *stochastische Integral (Ito-Integral)* von X bzgl. M. Bez. wie oben.

Bemerkung 2. Auf diese Weise: Fortsetzung des stochastischen Integrals auf $\mathfrak{P}^*$; $I(X)$ ist stetig und adaptiert mit $I_0(X) = 0$. Ferner $I_{t\wedge T_n}(X) = I_{t\wedge T_n}(X^{(T_n)})$, also

$$I_{\cdot\wedge T_n}(X) \in \mathfrak{M}_2^c.$$

Es gilt jedoch i.a. nicht $I(X) \in \mathfrak{M}_2^c$, siehe Übung 9.1.b. Siehe auch Karatzas, Shreve (1999, p. 36).

[10] Existenz: Übung 9.1.a.

Definition 6. Adaptierter Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ *lokales Martingal*, falls Stoppzeitenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (i) und (ii) existiert, so daß $X_{\cdot\wedge T_n}$ Martingal für $n \in \mathbb{N}$.

Also ist $I(X)$ für $X \in \mathfrak{P}^*$ ein lokales Martingal. Siehe Karatzas, Shreve (1999, Sec. 3.2.D) zur Integration bzgl. stetiger lokaler Martingale.

Beispiel 1. Wir bestimmen

$$\int_0^t W_u \, dW_u,$$

also $X = M = W$. Vorab: W ist progressiv meßbar, und es gilt

$$[W]_t^2 = E\left(\int_0^t W_u^2 \, du\right) = \int_0^t u \, du = \tfrac{1}{2}t^2.$$

Dies zeigt: $W \in \mathfrak{L}^*$.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}_0$ sei $t_i = t_i^{(n)} = i/2^n \cdot t$. Setze

$$W_u^{(n)} = W_{t_i}, \qquad \text{falls } u \in \,]t_i, t_{i+1}],$$

sowie $W_0^{(n)} = W_0$. Offenbar gilt $W^{(n)} \in \mathfrak{L}^*$, und $W^{(n)}$ ist von der Form (1) aber nicht einfach, da nicht beschränkt. Aus

$$\left[W - W^{(n)}\right]_{t_i}^2 = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} E(W_u - W_u^{(n)})^2 \, du = i \cdot \tfrac{1}{2}(t/2^n)^2 = \frac{i \cdot t^2}{2^{2n+1}}$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left[W - W^{(n)}\right] = 0$$

und weiter gem. Satz 1

$$\lim_{n\to\infty} \left\| I(W) - I(W^{(n)}) \right\|_t = 0.$$

Mittels Lokalisation zeigt man[11]

$$I_t(W^{(n)}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} W_{t_i} \cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(W_t^2 - \sum_{i=0}^{2^n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right). \tag{4}$$

Schließlich zeigt Übung 6.1

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - t \right)^2 = 0.$$

Fazit

$$\int_0^t W_u \, dW_u = \tfrac{1}{2}W_t^2 - \tfrac{1}{2}t.$$

[11] Beachte $a(b-a) = \frac{1}{2}((b^2 - a^2) - (b-a)^2)$.

Bemerkung 3. Betrachte Zerlegungen $\pi_m = \{t_0^{(m)}, \dots, t_m^{(m)}\}$ mit

$$0 = t_0^{(m)} < \dots < t_m^{(m)} = t, \qquad \lim_{m\to\infty} \|\pi_m\| = 0.$$

Kurz: $t_i = t_i^{(m)}$. Wähle $\lambda \in [0,1]$, setze

$$\tau_i = \tau_i^{(m)} = (1-\lambda)\cdot t_i + \lambda \cdot t_{i+1}.$$

Dann[12]

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\sum_{i=0}^{m-1} W_{\tau_i}\cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) - \left(\tfrac{1}{2}W_t^2 + (\lambda - \tfrac{1}{2})t\right)\right)^2 = 0.$$

Bei obiger Approximation des Ito-Integrals gem. (4): $\lambda = 0$; genau diese Wahl führt auf ein Martingal. Beim *Stratonovich Integral* wählt man $\lambda = \frac{1}{2}$; dann ergibt sich die Analogie zu

$$\int_0^t f(s)\,df(s) = \tfrac{1}{2}f^2(t)$$

für $f \in C^1([0,t])$ mit $f(0) = 0$.

Satz 2. Gelte $M, N \in \mathfrak{M}_2^c$ und $X \in \mathfrak{L}^*(M)$ sowie $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$. Dann folgt

$$\langle I^M(X), I^N(Y)\rangle_t = \int_0^t X_u \cdot Y_u \, d\langle M, N\rangle_u, \qquad t \in I.$$

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 144). Im Spezialfall $M = N$: Ito-Isometrie. □

Satz 3. Sei $M \in \mathfrak{M}_2^c$, $X \in \mathfrak{L}^*(M)$ und

$$N_t = \int_0^t X_u \, dM_u, \qquad t \in I.$$

Ferner sei $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$. Dann: $XY \in \mathfrak{L}^*(M)$ und

$$\int_0^t Y_u \, dN_u = \int_0^t X_u Y_u \, dM_u, \qquad t \in I.$$

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 145). □

2 Die Ito-Formel

Wir betrachten Prozesse X der Form

$$X_t = X_0 + M_t + B_t, \qquad t \in I, \tag{5}$$

wobei

[12] Karatzas, Shreve (1999, p. 148)

(i) X_0 $\mathfrak{F}_0$-meßbar,

(ii) $M = (M_t)_{t\in I} \in \mathfrak{M}_2^c$,

(iii) $B = (B_t)_{t\in I}$ adaptiert, stetig mit $B_0 = 0$ und von beschränkter Variation auf jedem kompakten Intervall.

Bemerkung 4. Prozesse der Form (5) sind spezielle stetige *Semimartingale.*[13] Obige Zerlegung ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit, siehe Übung 9.2. In zeitkontinuierlichen Finanzmärkten werden Preisprozesse in der Regel als Semimartingale modelliert.

Beispiel 2. Mit $N \in \mathfrak{M}_2^c$, $Y \in \mathfrak{L}^*(N)$, Z progressiv meßbar und lokal Lebesgue-integrierbar:

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_u \, dN_u + \int_0^t Z_u \, du.$$

Bez.: *Ito-Prozeß.*

Satz 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei X von der Form (5). Dann folgt

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u) \, dM_u + \int_0^t f'(X_u) \, dB_u + \tfrac{1}{2} \int_0^t f''(X_u) \, d\langle M \rangle_u, \qquad t \in I.$$

Beweisskizze. Vorab: Für $k = 1, 2$ sind die Prozesse $f^{(k)} \circ X$ stetig und progressiv meßbar. Die Lebesgue-Stieltjes Integrale bzgl. dB_u und $d\langle M \rangle_u$ sind pfadweise wohldefiniert.

Betrachte Zerlegung $0 = t_0 < \cdots < t_m = t$ von $[0, t]$. Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^m f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^m f'(X_{t_{k-1}}) \cdot (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^m f''(\eta_k) \cdot (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2, \end{aligned}$$

wobei $\eta_k(\omega)$ zwischen $X_{t_{k-1}}(\omega)$ und $X_{t_k}(\omega)$. Unter geeigneten Beschränktheitsvoraussetzungen konvergiert die erste Summe im Quadratmittel gegen

$$\int_0^t f'(X_u) \, dM_u + \int_0^t f'(X_u) \, dB_u$$

und die zweite Summe gegen

$$\int_0^t f''(X_u) \, d\langle M \rangle_u.$$

[13] Allgemeiner: stetige *lokale Martingale* M. Bzgl. Semimartingalen kann man sinnvoll das stochastische Integral erklären.

Letzteres ist plausibel, da B glatter als M ist. Etwas genauer: für jede Zerlegung π wie oben gilt

$$V_t^{(2)}(B;\pi) \le \sup_{k=1,\dots,m} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \cdot V_t^{(1)}(B;\pi) \le \left(V_t^{(1)}(B;\pi)\right)^2.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\forall\ \omega \in \Omega \ \ \exists\ K > 0: \quad \sup_\pi V_t^{(1)}(B;\pi)(\omega) \le K.$$

Wir nehmen an, daß

$$\exists\ K > 0: \quad \sup_{\omega\in\Omega} \sup_\pi V_t^{(1)}(B;\pi)(\omega) \le K.$$

Dann sichert der Lebesguesche Grenzwertsatz

$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_t^{(2)}(B;\pi_n)\right)^2 = 0$$

für alle Folgen von Partitionen mit $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$. Im allgemeinen Fall: Lokalisation. Details bei Karatzas, Shreve (1999, p. 149–153). □

Beispiel 3. Wähle $f(x) = x^2$, $X = M = W$ und $B = 0$. Dann[14]

$$W_t^2 = \int_0^t 2\, W_u\, dW_u + t.$$

Bemerkung 5. Man verwendet oft die symbolische Kurzschreibweise

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)\, dM_t + f'(X_t)\, dB_t + \tfrac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle M\rangle_t \\ &= f'(X_t)\, dX_t + \tfrac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle M\rangle_t \end{aligned}$$

für die Formel aus Satz 4. Zum Vergleich die Kettenregel der klassischen Differentialrechnung:

$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t.$$

Man schreibt kurz $\int Y\, dX$ für $\int Y\, dB + \int Y\, dM$.

Satz 4 enthält die Grundversion der *Ito-Formel*. Allgemeinere Varianten, deren Beweise ähnlich wie der oben skizzierte verlaufen, lauten wie folgt.

Satz 5. Sei $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen

$$f_t = f^{(1,0)}, \quad f_x = f^{(0,1)}, \quad f_{xx} = f^{(0,2)}$$

und sei X von der Form (5). Dann folgt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) =& f(0, X_0) + \int_0^t f_t(u, X_u)\, du + \int_0^t f_x(u, X_u)\, dM_u + \int_0^t f_x(u, X_u)\, dB_u \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(u, X_u)\, d\langle M\rangle_u, \qquad\qquad t \in I. \end{aligned}$$

[14] Die Berechnung von $\int_0^t W_u\, dW_u$ ist jetzt ein Einzeiler, vgl. Bsp. 1

Nun zur Ito-Formel für $\mathbb{R}^d$-wertige Prozesse X, die komponentenweise von der Form (5) sind. Betrachte Abbildungen $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen

$$f^{(1,0)} \text{ mit } 0 \in \mathbb{N}_0^d, \qquad f^{(0,\alpha)} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ und } |\alpha| \leq 2.$$

Die Bezeichnungen f_t, f_{x_i} und $f_{x_i x_j}$ sind kanonisch. Gelte

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + M_t^{(i)} + B_t^{(i)}, \qquad t \in I,\ i \in \{1, \ldots, d\},$$

so daß $X_0^{(i)}$ $\mathfrak{F}_0$-meßbar, $M^{(i)} \in \mathfrak{M}_2^c$, $B^{(i)}$ stetig, adaptiert mit beschränkter Variation auf beliebigen kompakten Intervallen und $B_0^{(i)} = 0$.

Satz 6. Unter obigen Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) =& f(0, X_0) + \int_0^t f_t(u, X_u)\, du \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(u, X_u)\, dM_u^{(i)} + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(u, X_u)\, dB_u^{(i)} \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t f_{x_i x_j}(u, X_u)\, d\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_u, \qquad t \in I. \end{aligned}$$

Satz 7 (partielle Integration)**.**

$$X_t^{(1)} \cdot X_t^{(2)} = X_0^{(1)} \cdot X_0^{(2)} + \int_0^t X_s^{(1)}\, dX_s^{(2)} + \int_0^t X_s^{(2)}\, dX_s^{(1)} + \langle M^{(1)}, M^{(2)} \rangle_t, \qquad t \in I.$$

Beweis. Ito-Formel mit $f(t, x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. □

3 Die geometrische Brownsche Bewegung

Literatur:

Irle (1999, Kap. 8),
Bingham, Kiesl (1998, Chap. 4.6).

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma, s_0 > 0$ definieren wir $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t, x) = s_0 \cdot \exp(\alpha\, t + \sigma\, x).$$

Sei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0. Setze $S_t = f(t, W_t)$, also

$$S_t = s_0 \cdot \exp(\alpha\, t + \sigma\, W_t), \qquad t \in I.$$

Übung 6.2 behandelt den Spezialfall $\alpha = 0$ und $\sigma = 1$.

Definition 7. Der oben definierte Prozeß $S = (S_t)_{t \in I}$ heißt *geometrische Brownsche Bewegung* mit *Startwert* s_0 und *Volatilität* σ.

Fortan: S geometrische Brownsche Bewegung.

Anwendung der Ito-Formel für $X = M = W$ und $B = 0$:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + \alpha \cdot \int_0^t S_u\,du + \sigma \cdot \int_0^t S_u\,dW_u + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot \int_0^t S_u\,du \\ &= S_0 + \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot \int_0^t S_u\,du + \sigma \cdot \int_0^t S_u\,dW_u. \end{aligned} \tag{6}$$

Also löst S die stochastische Integralgleichung (6).

Bemerkung 6. *Black-Scholes-Modell:* ein zeitkontinuierliches Finanzmarktmodell mit zwei Basisgütern[15]

(i) eine festverzinsliche Anlage („bond“) mit kontinuierlicher Verzinsung bei fester Zinsrate $\rho > 0$,[16]

(ii) eine „Aktie“, deren Preisprozeß eine geometrische Brownsche Bewegung ist.

Lemma 4.

$$S \text{ Martingal} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\tfrac{1}{2}\sigma^2.$$

Beweis. Klar: $S \in \mathfrak{L}^*$, so daß $I(S)$ gem. Satz 1 ein Martingal ist. Beachte, daß $\int_0^t S_u\,du$ einen stetigen, wachsenden, strikt positiven Prozeß definiert, der somit kein Martingal ist. □

Definition 8. *Drift* der geometrischen Brownschen Bewegung S:

$$\mu = \alpha + \tfrac{1}{2}\sigma^2.$$

Lemma 5. Für $t \in I$ gilt

$$E(S_t) = s_0 \cdot \exp(\mu\, t), \qquad \mathrm{Var}(S_t) = s_0^2 \cdot \exp(2\mu\, t) \cdot \left(\exp(\sigma^2\, t) - 1\right).$$

Beweis. Mit Satz 1 oder elementar. □

Lemma 6. Die relativen Inkremente $(S_t - S_s)/S_s$, $0 \le s < t$, sind unabhängig von $\mathfrak{F}_s$ und stationär. Die *returns* S_t/S_s sind lognormalverteilt.

Beweis. Verwende $(S_t - S_s)/S_s = \exp(\alpha\,(t-s) + \sigma\,(W_t - W_s)) - 1$. □

Das Donskersche Invarianzprinzip läßt sich auf die geometrische Brownsche Bewegung übertragen. Wir verwenden die Bezeichnungen und Annahmen aus Abschnitt II.2.3. Hier nur der Martingal-Fall mit $s_0 = 1$. Definiere $H : C(I) \to C(I)$ durch

$$(Hf)(t) = \exp(-\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 t + \sigma\, f(t)).$$

Dann konvergiert HP_n schwach gegen HP_*; Beweis Übung 10.4. Klar: HP_* ist die Verteilung der geometrischen Brownschen Bewegung mit Startwert 1, Drift 0 und Volatilität σ, und HP_n ist die Verteilung von $S^{(n)} = HX^{(n)}$.

[15] Siehe Beispiel I.2.

[16] Also Preisverlauf $t \mapsto c \cdot \exp(\rho\, t)$; OBdA $c = 1$.

Es gilt

$$S_t^{(n)}(\omega) = \exp(-\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 t + \sigma\, X_t^{(n)}(\omega))$$

und für $t \in [k/n, (k+1)/n]$ mit $k \in \mathbb{N}_0$

$$-\tfrac{1}{2}\,\sigma^2 t + \sigma\, X_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}}(\xi_j - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2/\sqrt{n}) + (t\sqrt{n} - k/\sqrt{n}) \cdot (\xi_{k+1} - \tfrac{1}{2}\sigma^2/\sqrt{n}).$$

Somit

$$S_t^{(n)} = \prod_{j=1}^{k} \underbrace{\exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\xi_j - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2/\sqrt{n}\right)\right)}_{Y_j^{(n)}} \cdot \left(Y_{k+1}^{(n)}\right)^{t\,n-k}.$$

Klar: für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots$ iid.
Spezialfall: ξ_j zweipunktverteilt. Dann ist $S_{k/n}^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, der Aktienpreisprozeß in einem Cox-Ross-Rubinstein-Modell, siehe Beispiel I.7. Im Falle $P(\{\xi_j = \pm\sigma\}) = \frac{1}{2}$ nimmt $Y_j^{(n)}$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ die Werte

$$\exp(\pm\sigma/\sqrt{n}) \cdot \exp(-\tfrac{1}{2}\,\sigma^2/n)$$

an.