Man verifiziert 2.) für $P_n = Q_n$, und somit gilt: jede Teilfolge von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Betrachte nun die „endlich-dimensionalen Randverteilungen" der Maße P_n. Dazu sei

$$\pi_{t_1,\dots,t_k} : C(I) \to \mathbb{R}^k : f \mapsto (f(t_1), \dots, f(t_k))$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in I$ paarweise verschieden. Für alle k und t_i zeigt man

$$\pi_{t_1,\dots,t_k} P_n \to N(0, K),$$

wobei K durch (1) gegeben ist[13]. Damit folgt die Unabhängigkeit des Grenzwertes von den betrachteten Teilfolgen, vgl. Lemma 2. Ebenso folgt, daß dieser Grenzwert das Wiener-Maß ist. □

Beachte: Obiger Beweis beinhaltet eine weitere Konstruktion der Brownschen Bewegung (und des Wiener-Maßes).

Satz 4 ermöglicht die näherungsweise Berechnung von Funktionalen der Brownschen Bewegung z. Bsp. mittels Monte-Carlo-Methoden (Simulation von Irrfahrten).

3 Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ sowie $d \in \mathbb{N}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

3.1 Mehrdimensionale Brownsche Bewegung

Definition 6. $W = (W_t)_{t\in I}$ *d-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl.* $\mathfrak{F}$ *mit Startverteilung* μ, falls

(i) W $\mathbb{R}^d$-wertig mit stetigen Pfaden,

(ii) W adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(iii) $W_0 P = \mu$,

(iv) für $0 \le s < t$ ist $W_t - W_s$

  (a) unabhängig von $\mathfrak{F}_s$,

  (b) $N(0, (t-s)\,\mathrm{Id}_d)$-verteilt.

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt* $x \in \mathbb{R}^d$.

[13] Für $k = t_1 = 1$ ist dies der Zentrale Grenzwertsatz.

Für jede d-dimensionale Brownsche Bewegung $W = \big((W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})\big)_{t\in I}$ mit Startpunkt $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$ gilt: $W^{(1)}, \dots, W^{(d)}$ sind unabhängige Brownsche Bewegungen der Dimension eins mit Startpunkten $x^{(1)}, \dots, x^{(d)}$.

Konstruktion[14] : $\Omega = (C(I))^d$, $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B}(C(I)))^d$,

$$W_t((f_1, \dots, f_d)) = (f_1(t), \dots, f_d(t))$$

mit kanonischer Filtration, P^0 d-faches Produkt des Wiener-Maßes, Wahrscheinlichkeitsmaß $P = P^\mu$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ definiert durch[15]

$$P^\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{P^0(A - x)}_{=P^x(A)} \, d\mu(x), \qquad A \in \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 72) zur $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$-$\mathfrak{B}([0,1])$-Meßbarkeit von $x \mapsto P^x(A)$.

Im Sinne der schwachen Konvergenz kann eine d-dimensionale Brownsche Bewegung durch eine d-dimensionale Irrfahrt approximiert werden.

Definition 7. Sei M metrischer Raum und $\mu \in \mathfrak{M}(M)$. Bezeichne mit $\overline{\mathfrak{B}(M)}^\mu$ die μ-Vervollständigung von $\mathfrak{B}(M)$. Dann heißt

$$\mathfrak{U}(M) = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}(M)} \overline{\mathfrak{B}(M)}^\mu$$

die σ-Algebra der *universell meßbaren Mengen*. Kurz: universelle Meßbarkeit für $\mathfrak{U}(M)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$-Meßbarkeit.

Definition 8. *d-dimensionale Brownsche Familie* ist eine Familie $(W_t)_{t\in I}$ von Abbildungen $W_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(W_t)_{t\in I}$ ist Brownsche Bewegung mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$.

Konstruktion: siehe oben; hier wird sogar die Borel-Meßbarkeit in (i) erreicht.

Eine Brownsche Familie liefert Brownsche Bewegungen mit beliebigen Startverteilungen gemäß (6).

3.2 Markov-Prozesse

Motivation: „Gedächtnislosigkeit“ von Irrfahrten.

Definition 9. $\mathbb{R}^d$-wertiger adaptierter Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ heißt *Markov-Prozeß mit Startverteilung* μ, falls

(i) $X_0 P = \mu$,

[14]Es gilt $(\mathfrak{B}(C(I)))^d = \mathfrak{B}(C(I)^d)$, siehe Gänssler, Stute (1977, Satz 1.3.13).

[15]Vgl. Faltung.

(ii) für $s, t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \,|\, \mathfrak{F}_s) = P(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \,|\, X_s).$$

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *Markov-Prozeß mit Startpunkt* $x \in \mathbb{R}^d$.

Analog für Teilmengen von $[0, \infty[$ als Indexmengen, insbesondere für die diskrete Indexmenge $\mathbb{N}_0$.

Proposition 7. Sei X Markov-Prozeß. Setze $\mathfrak{B}_s = \sigma(\{X_u : u \geq s\})$. Dann

(i) für $s \in I$ und $A \in \mathfrak{B}_s$

$$P(A \,|\, \mathfrak{F}_s) = P(A \,|\, X_s),$$

(ii) für $s \in I$ und Y $\mathfrak{B}_s$-meßbar mit $E(|Y|) < \infty$

$$E(Y \,|\, \mathfrak{F}_s) = E(Y \,|\, X_s).$$

Beweis. ad (i): siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 76, 77).
ad (ii): algebraische Induktion unter Verwendung von (i). □

Definition 10. *d-dimensionale Markov-Familie* ist eine Familie $(X_t)_{t \in I}$ von Abbildungen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(X_t)_{t \in I}$ ist Markov-Prozeß mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$,

(iii) für $x \in \mathbb{R}^d$, $s, t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$P^x(\{X_{s+t} \in \Gamma\} \,|\, X_s = y) = P^y(\{X_t \in \Gamma\})$$

für $X_s P^x$ f.a. $y \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 8. Jede d-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein Markov-Prozeß. Jede d-dimensionale Brownsche Familie ist eine Markov-Familie.

Beweis. Betrachte d-dimensionale Zufallsvektoren X, Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine σ-Algebra $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{A}$. Gelte: X und $\mathfrak{G}$ unabhängig, Y $\mathfrak{G}$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$-meßbar. Dann folgt für $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P(\{X + Y \in \Gamma\} \,|\, \mathfrak{G}) = P(\{X + Y \in \Gamma\} \,|\, Y) \tag{7}$$

und für $Y P$-f.a. $y \in \mathbb{R}^d$

$$P(\{X + Y \in \Gamma\} \,|\, Y = y) = P(\{X + y \in \Gamma\}), \tag{8}$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 121).
Anwendung: $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_s$, $X = W_{s+t} - W_s$, $Y = W_s$. Mit (7) folgt: W ist Markov-Prozeß. Ferner liefert (8)

$$P^x(\{W_{s+t} \in \Gamma\} \,|\, W_s = y) = P^x(\{W_{s+t} - W_s + y \in \Gamma\}).$$

Die Verteilung von $W_{s+t} - W_s + y$ bzgl. P^x ist $N(y, t\,\mathrm{Id}_d)$ und stimmt folglich mit der Verteilung von W_t bzgl. P^y überein. □

Bemerkung 2. Es gilt weder „Markov-Prozeß $\Rightarrow$ Martingal" noch „Martingal $\Rightarrow$ Markov-Prozeß". Gegenbeispiel zur ersten Implikation: Poisson-Prozeß; Beweis siehe oben. Gegenbeispiel zur zweiten Implikation: Übung 6.4.

3.3 Starke Markov-Eigenschaft und Spiegelungsprinzip

Betrachte eine eindimensionale Brownsche Bewegung W bzgl. $\mathfrak{F}$ und ihre *Niveauzeiten*

$$T_b(\omega) = \inf\{t \in I : W_t(\omega) = b\}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Diese sind Stoppzeiten, siehe Proposition I.5.(ii).
Fragen: Wie lautet die Verteilung von T_b? Gilt insbesondere $T_b < \infty$ P-f.s.? Im Falle einer positiven Antwort: ist $(W_{T_b+t} - W_{T_b})_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung und unabhängig von $\mathfrak{F}_{T_b}$?
Setze

$$\mathfrak{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathfrak{F}_{t+\varepsilon}$$

sowie

$$\mathfrak{F}_{T+} = \{A \in \mathfrak{A} : \forall\, t \in I : A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_{t+}\}$$

für optionale Zeiten $T : \Omega \to I \cup \{\infty\}$.

Bemerkung 3.

(i) $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in I}$ ist rechtsseitig stetige Filtration mit $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t+}$,

(ii) T optionale Zeit bzgl. $\mathfrak{F} \Leftrightarrow T$ Stoppzeit bzgl. $\mathfrak{F}_+$

(iii) $\mathfrak{F}_{T+}$ ist σ-Algebra. Ferner $\mathfrak{F}_T \subset \mathfrak{F}_{T+}$ für Stoppzeiten T.

Definition 11. Optionale Zeit T heißt *P-endlich*, falls $P(\{T < \infty\}) = 1$.

Definition 12. $\mathbb{R}^d$-wertiger progressiv meßbarer Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ heißt *starker Markov-Prozeß mit Startverteilung* μ, falls

(i) $X_0 P = \mu$,

(ii) für $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede P-endliche optionale Zeit S gilt

$$P(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \mid \mathfrak{F}_{S+}) = P(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \mid X_S).$$

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *starker Markov-Prozeß mit Startpunkt* $x \in \mathbb{R}^d$.

Definition 13. *d-dimensionale starke Markov-Familie* ist eine Familie $(X_t)_{t\in I}$ von Abbildungen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Familie $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so daß gilt

(i) für alle $A \in \mathfrak{A}$: $x \mapsto P^x(A)$ universell meßbar,

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$: $(X_t)_{t\in I}$ ist starker Markov-Prozeß mit Startwert x auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^x)$,

(iii) für $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede P^x-endliche optionale Zeit S gilt

$$P^x(\{X_{S+t} \in \Gamma\} \mid X_S = y) = P^y(\{X_t \in \Gamma\})$$

für $X_S P^x$ f.a. $y \in \mathbb{R}^d$.

Satz 5. Jede d-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein starker Markov-Prozeß. Jede d-dimensionale Brownsche Familie ist eine starke Markov-Familie.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, Sections 2.6 B, C). □

Im folgenden sei W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und S eine P-endliche optionale Zeit.

Satz 6. Durch

$$B_t = W_{S+t} - W_S, \qquad t \in I,$$

wird eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathfrak{F}_t^B)$ mit Startwert 0 definiert, die unabhängig von $\mathfrak{F}_{S+}$ ist.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 86, 87). □

Satz 7 (Spiegelungsprinzip)**.** Sei S Stoppzeit und $d = 1$. Durch

$$B_t = \begin{cases} W_t & \text{falls } 0 \leq t < S \\ 2W_S - W_t & \text{falls } t \geq S \end{cases}$$

wird eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathfrak{F}_t^B)$ mit Startwert 0 definiert.

Beweis. Siehe Partzsch (1984, p. 47). □

Anwendung: Die Verteilungen der Niveauzeiten T_b und damit der Maxima auf kompakten Intervallen $[0, u]$ für eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0. OBdA[16] $b > 0$. Für $u > 0$

$$\begin{aligned} P(\{T_b \leq u\}) &= P(\{\max_{t \in [0,u]} W_t \geq b\}) \\ &= P(\{T_b \leq u\} \cap \{W_u \leq b\}) + P(\{T_b \leq u\} \cap \{W_u > b\}) \\ &= P(\{T_b \leq u\} \cap \{W_u \leq b\}) + P(\{W_u > b\}). \end{aligned}$$

Mit Satz 7 folgt

$$P(\{T_b \leq u\} \cap \{W_u \leq b\}) = P(\{W_u \geq b\}).$$

Fazit

$$\begin{aligned} P(\{T_b \leq u\}) = 2 \cdot P(\{W_u \geq b\}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\, u}} \cdot \int_b^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2u}\right)\, dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{b/\sqrt{u}}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\, dy. \end{aligned}$$

[16] Mit W ist auch $-W$ Brownsche Bewegung bzgl. derselben Filtration, siehe Proposition 11.

3.4 Brownsche Filtrationen

Die Filtration im kanonischen Modell der Brownschen Bewegung ist nicht rechtsseitig stetig. Ferner existieren in diesem Modell Mengen $A \in \mathfrak{B}(C(I))$ mit $P_*(A) = 0$ und $A \notin \mathfrak{F}_t$ für alle $t \in I$, vgl. Übung 7.2.

Für beliebige Filtrationen $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ setzen wir

$$\mathfrak{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \in I} \mathfrak{F}_t\right).$$

Betrachte einen d-dimensionalen Prozeß X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit seiner kanonischen Filtration $\mathfrak{F}^X$. Setze

$$\mathfrak{N}^P = \{A \subset \Omega : \exists\, B \in \mathfrak{F}^X_\infty : A \subset B \wedge P(B) = 0\}.$$

Nach Einschränkung von P auf $\mathfrak{F}^X_\infty$ und anschließender Vervollständigung erhält man ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathfrak{F}^X_\infty \cup \mathfrak{N}^P)$, welches wieder mit P bezeichnet wird. Durch

$$\mathfrak{F}^P_t = \sigma(\mathfrak{F}^X_t \cup \mathfrak{N}^P), \qquad t \in I,$$

erhält man eine von X und P abhängige Filtration $\mathfrak{F}^P$, genannt die *augmentierte Filtration.*

Proposition 9. Für jeden starken Markov-Prozeß erfüllt $\mathfrak{F}^P$ die üblichen Voraussetzungen.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 90) zum Beweis der rechtsseitigen Stetigkeit. Klar: $\mathfrak{N}^P \subset \mathfrak{F}^P_0$. □

Proposition 10. Für jede d-dimensionale Brownsche Bewegung W gilt: W ist auch bzgl. $\mathfrak{F}^P$ eine Brownsche Bewegung.

Beweis. Klar. □

Somit insbesondere konstruiert: eine Brownsche Bewegung unter den üblichen Voraussetzungen über die Filtration.

Betrachte nun eine Brownsche Familie $(W_t)_{t \in I}$, $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$. Definiere P^μ gemäß (6) sowie

$$\widetilde{\mathfrak{F}}_t = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)} \mathfrak{F}^{P^\mu}_t, \qquad t \in I.$$

Klar: die Filtration $\widetilde{\mathfrak{F}}$ ist rechtsseitig stetig und es gilt

$$\mathfrak{F}^W_t \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_t \subset \mathfrak{F}^{P^\mu}_t.$$

Satz 8. Jede d-dimensionale Brownsche Familie $(W_t)_{t \in I}$, $(P^x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ ist auch bzgl. der Filtration $(\widetilde{\mathfrak{F}}_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{F}}_\infty)$ eine d-dimensionale Brownsche Familie.

Beweis. Siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 93). Im Beweis läßt sich nur die universelle Meßbarkeit der Abbildungen $x \mapsto P^x(F)$ für alle $F \in \widetilde{\mathfrak{F}}_\infty$ zeigen. □

Obige Filtration $\widetilde{\mathfrak{F}}$ heißt auch die *universelle Filtration* der Brownschen Familie.

4 Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung

Im folgenden sei $W = (W_t)_{t\in I}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bzgl. der Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$.

Proposition 11 (Symmetrie)**.** $(-W_t)_{t\in I}$ ist Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit Startwert 0.

Proposition 12 (Skalierungsinvarianz)**.** Für jedes $c > 0$ definiert

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot W_{c\cdot t}, \qquad t \in I,$$

eine Brownsche Bewegung bzgl. $(\mathfrak{F}_{c\cdot t})_{t\in I}$ mit Startwert 0.

Beweise der nachstehenden Fakten finden sich bei Karatzas, Shreve (1999, Chap. 2.9).

Proposition 13 (Projektive Spiegelung bei $t = \infty$)**.** Durch

$$X_t = \begin{cases} t \cdot W(1/t) & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

wird eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathfrak{F}^X$ mit Startwert 0 definiert.

Proposition 14 (Zeitumkehr)**.** Für jedes $T > 0$ wird durch

$$X_t = W_T - W_{T-t}, \qquad t \in [0, T],$$

eine Brownsche Bewegung auf $[0, T]$ bzgl. $(\mathfrak{F}^X_t)_{t\in[0,T]}$ mit Startwert 0 definiert.

Proposition 15 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.**

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0 \qquad P\text{-f.s.}$$

Proposition 16 (Gesetz vom iterierten Logarithmus)**.**

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \cdot \ln\ln t}} = 1 \qquad P\text{-f.s.}$$

Proposition 17 (Hölder-Stetigkeit und Nichtdifferenzierbarkeit)**.** P-f.s. gilt: W in keinem Punkt Hölder-stetig mit Exponent $\gamma > 1/2$.

Vgl. Abschnitt 1.

Proposition 18 (Lévyscher Stetigkeitsmodul)**.**

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{m_1(W;\delta)}{\sqrt{2\delta \cdot \ln \delta^{-1}}} = 1 \qquad P\text{-f.s.}$$

Betrachte die *Niveaumengen*

$$Z_b(\omega) = \{t \in I : W_t(\omega) = b\}.$$

Proposition 19. P-f.s. gilt: Z_b ist abgeschlossen und unbeschränkt, hat Lebesgue-Maß null besitzt den Häufungspunkt null für $b = 0$ und keine isolierten Punkte in $]0, \infty[$.