Kapitel II

Brownsche Bewegung

Literatur:

Karatzas, Shreve (1999, Chap. 2).

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$, wobei $I = [0, \infty[$.

Definition 1. $W = (W_t)_{t \in I}$ *Brownsche Bewegung (Wiener-Prozeß)* bzgl. $\mathfrak{F}$, falls

(i) W reellwertig mit stetigen Pfaden,

(ii) W adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(iii) $W_0 = 0$,

(iv) für $0 \leq s < t$ ist $W_t - W_s$

  (a) unabhängig von $\mathfrak{F}_s$,
  (b) $N(0, t-s)$-verteilt[1].

Bemerkung 1. Brownsche Bewegungen sind Prozesse mit stationären, unabhängigen Inkrementen, vgl. Beispiel I.12. Ferner besitzen alle Brownschen Bewegungen dieselbe Verteilung auf $(\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I)$, siehe Bemerkung I.13.(ii).

Proposition 1. $W \in \mathfrak{M}_2^c$ und $\langle W \rangle_t = t$.

Beweis. [2] Vgl. Beweise für den kompensierten Poisson-Prozeß (mit $\lambda = 1$), siehe Bsp. I.6 und Übung 2.3.b. Zum Nachweis der Martingaleigenschaft benötigt: (iv.a) und $E(W_t - W_s) = 0$. Zur Bestimmung der quadratischen Variation benötigt: (iv.a) und $E(W_t - W_s)^2 = |t-s|$. □

Die endlich-dimensionalen Randverteilungen einer Brownschen Bewegung sind wie folgt gegeben.

[1] $N(m, K)$ ist die Normalverteilung auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ mit Mittelwert $m \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrix $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n = 1$: Varianz K). Siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. 1.19)

[2] Siehe auch Karatzas, Shreve (1999, Exercise I.5.20)

Lemma 1. Sei W Brownsche Bewegung und

$$K = (\min(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n} \tag{1}$$

mit paarweise verschiedenen $t_1, \dots, t_n \in I$. Dann:

$$W_{t_1}, \dots, W_{t_n} \text{ sind gemeinsam } N(0, K)\text{-verteilt.}$$

Beweis. Gelte $0 \le t_1 < \cdots < t_n$. Setze

$$Z = (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})', \qquad Y = (W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})'$$

sowie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Beispiel 1 und (iv.b) folgt: Y ist $N(0, D)$-verteilt mit

$$D = \begin{pmatrix} t_1 - 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wg. (iii) gilt $Z = A \cdot Y$. Somit ist Z $N(m, K)$-verteilt mit $m = A \cdot 0 = 0$ und

$$K = A \cdot D \cdot A' = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} = (\min(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

□

1 Eine Konstruktion der Brownschen Bewegung

Hier: mit Hilfe des Konsistenzsatzes von Kolmogorov.

Proposition 2. Es existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I)$, so daß für den kanonischen Prozeß $(\widetilde{W}_t)_{t \in I}$ auf $(\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I, Q)$ gilt

(i) $\widetilde{W}_0 = 0$ Q-f.s.,

(ii) $\widetilde{W}$ besitzt unabhängige Inkremente,

(iii) $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ ist $N(0, t-s)$-verteilt für $0 \le s < t$.

Beweis. Für $\nu_{s,t} = N(0, t-s)$ ist Satz I.16 anwendbar. □

Der Pfadraum von $\widetilde{W}$ ist viel zu groß. Die anderen Eigenschaften der Brownschen Bewegung (bzgl. der kanonischen Filtration) sind hingegen erreicht. Zur Verifikation von (iv).(a) verwendet man Lemma I.5.
Frage: Gilt $C(I) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I$ und $P(C(I)) = 1$? Antwort: Nein, da

$$\forall\, A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I : \quad A \subset C(I) \quad \Rightarrow \quad A = \emptyset.$$

Satz 1 (Kolmogorov-Chentsov)**.** Der Prozeß $(\widetilde{X}_t)_{t\in[0,T]}$ erfülle[3]

$$\exists\, \alpha, \beta > 0 : \sup_{s,t\in[0,T]} \frac{E|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t|^\alpha}{|s-t|^{1+\beta}} < \infty.$$

Dann existiert für jedes

$$\gamma \in \,]0, \beta/\alpha[$$

eine Modifikation $(X_t)_{t\in[0,T]}$ von $\widetilde{X}$, eine positive Zufallsvariable h sowie $\delta > 0$, so daß für alle $\omega \in \Omega$ gilt[4]:

$$\sup_{0<|t-s|<h(\omega)} \frac{|X_s(\omega) - X_t(\omega)|}{|s-t|^\gamma} \le \delta. \tag{2}$$

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ gilt[5]

$$P(\{|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t| \ge \varepsilon\}) \le \varepsilon^{-\alpha} \cdot E|\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t|^\alpha \preceq \varepsilon^{-\alpha} \cdot |s-t|^{1+\beta}.$$

Also: $\widetilde{X}_{s_n} \overset{P\text{-stoch}}{\to} \widetilde{X}_t$, falls $s_n \to t$.
Nun der Einfachheit halber: $T = 1$. Wähle $\gamma \in \,]0, \beta/\alpha[$. Dann

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\max_{1\le k\le 2^n} |\widetilde{X}_{k/2^n} - \widetilde{X}_{(k-1)/2^n}| \ge 2^{-\gamma n}\right\}\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{|\widetilde{X}_{k/2^n} - \widetilde{X}_{(k-1)/2^n}| \ge 2^{-\gamma n}\right\}\right) \\ &\preceq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{\gamma n\alpha} \cdot 2^{-n(1+\beta)} = 2^{-n(\beta-\gamma\alpha)}. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt die Existenz von $\Omega^* \in \mathfrak{A}$ mit $P(\Omega^*) = 1$ und $n^* : \Omega \to \mathbb{N}$ meßbar, so daß für alle $\omega \in \Omega^*$ gilt

$$\forall\, n \ge n^*(\omega) : \max_{1\le k\le 2^n} |\widetilde{X}_{k/2^n}(\omega) - \widetilde{X}_{(k-1)/2^n}(\omega)| < 2^{-\gamma n}.$$

Setze

$$D_n = \{k/2^n : k = 0, \dots, 2^n\}, \qquad D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} D_n$$

sowie $h(\omega) = 2^{-n^*(\omega)}$. Man zeigt nun[6] für $\omega \in \Omega^*$ und $s, t \in D$ mit $|s-t| < h(\omega)$

$$|\widetilde{X}_s(\omega) - \widetilde{X}_t(\omega)| \le \underbrace{\frac{2}{1-2^{-\gamma}}}_{=\delta} \cdot |s-t|^\gamma.$$

[3] Verschärfung für Gauß-Prozesse, siehe Adler (1981).
[4] alle Pfade sind lokal Hölder-stetig mit Exponent γ.
[5] $\preceq$ für $O(\dots)$.
[6] Details bei Karatzas, Shreve (1999, p. 54, 55)

Also ist $\widetilde{X}_\cdot(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega^*$ auf D gleichmäßig stetig und somit eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $X_\cdot(\omega) : [0,1] \to \mathbb{R}$ fortsetzbar. Für $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$ setzen wir $X_t(\omega) = 0$.

Klar: X ist ein stochastischer Prozeß, der (2) erfüllt. Für $t \in D$ gilt

$$P(\{X_t = \widetilde{X}_t\}) \geq P(\Omega^*) = 1.$$

Für $t \in [0,1] \setminus D$ und Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $s_n \to t$ gilt

$$\widetilde{X}_{s_n} \overset{P\text{-stoch.}}{\to} \widetilde{X}_t \qquad \wedge \qquad \widetilde{X}_{s_n} \overset{P\text{-f.s.}}{\to} X_t.$$

Also: $\widetilde{X}_t = X_t$ P-f.s. $\square$

Satz 2. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^I, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^I, Q)$ aus Proposition 2 existiert ein Prozeß, der bzgl. seiner kanonischen Filtration eine Brownsche Bewegung ist.

Beweis. Betrachte den o.g. Wahrscheinlichkeitsraum. Es gilt für $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned} E(|\widetilde{W}_s - \widetilde{W}_t|^\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha \exp\left(-\frac{y^2}{2(t-s)}\right) dy \\ &= (t-s)^{\alpha/2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha \exp(-\tfrac{1}{2}y^2)\, dy. \end{aligned}$$

Wähle $\alpha > 2$ und $\beta = \alpha/2 - 1$ sowie $T > 0$. Dann existiert gemäß Satz 1 eine Modifikation $(W_t^T)_{t\in[0,T]}$ von $(\widetilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ mit stetigen Pfaden. Setze

$$\Omega_T = \bigcap_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]} \{\widetilde{W}_t = W_t^T\}$$

und

$$\widetilde{\Omega} = \bigcap_{T\in\mathbb{N}} \Omega_T.$$

Dann

$$Q(\widetilde{\Omega}) = 1,$$

und für $\omega \in \widetilde{\Omega}$ und ganzzahlige $0 \leq T_1 \leq T_2$ sowie $t \in [0, T_1]$ gilt

$$W_t^{T_1}(\omega) = W_t^{T_2}(\omega).$$

Somit ist

$$W_t(\omega) = \begin{cases} W_t^T(\omega), & \text{falls } \omega \in \widetilde{\Omega} \text{ und } T \in \mathbb{N} \cap [t, \infty[\\ 0, & \text{falls } \omega \notin \widetilde{\Omega} \end{cases}$$

wohldefiniert und W ist eine Modifikation von $\widetilde{W}$.

Betrachte die kanonische Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t^W)_{t\in I}$. Klar: die Eigenschaften (i), (ii), (iii), (iv.b) der Brownschen Bewegung sind erfüllt und W besitzt unabhängige Inkremente. Wende Lemma I.5 an, um (iv.a) zu erhalten. $\square$

Für jedes $\gamma < \frac{1}{2}$ sind die Pfade einer Brownschen Bewegung f.s. lokal Hölder-stetig mit Exponent γ. Man wähle hierzu in obigem Beweis α hinreichend groß und $\beta = \alpha/2 - 1$. Es gilt $\lim_{\alpha\to\infty} \beta/\alpha = \frac{1}{2}$. Wir sehen später, daß diese Glattheitsaussage scharf – bis auf logarithmische Terme – ist.

2 Das Wiener Maß und das Donskersche Invarianzprinzip

2.1 Das Wiener-Maß

Zunächst: das kanonische Modell für die Brownsche Bewegung.
Setze

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{t \in [0,n]} \min(|f_1(t) - f_2(t)|, 1), \qquad f_i \in C(I).$$

Proposition 3. $(C(I), \rho)$ ist ein vollständiger separabler metrischer Raum[7].

Beweis. Unter Verwendung der entsprechenden Eigenschaften im kompakten Fall. □

Wir betrachten im folgenden stets obige Metrik auf $C(I)$ und die zugehörige Topologie samt Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}(C(I))$.

Proposition 4.

$$\mathfrak{B}(C(I)) = \sigma(\{f \mapsto f(t) : t \in I\}).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{G} = \sigma(\{f \mapsto f(t) : t \in I\})$. Für jedes $t \in I$ ist $f \mapsto f(t)$ stetig und somit Borel-meßbar. Also folgt: $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}(C(I))$.
Wir zeigen:

$$\mathfrak{G} \text{ enthält alle offenen Kugeln.} \tag{3}$$

Ersetze in $\rho(\cdot, f_0)$ die Maxima über $[0, n]$ durch die Suprema über $[0, n] \cap \mathbb{Q}$. Man erhält so eine $\mathfrak{G}$-meßbare Abbildung $\widetilde{\rho}(\cdot, f_0)$, und es gilt $\rho(\cdot, f_0) = \widetilde{\rho}(\cdot, f_0)$. Hiermit folgt (3).
In jedem separablen metrischen Raum gilt: jede offene Menge ist abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln. Mit (3) folgt: $\mathfrak{G}$ enthält alle offenen Teilmengen von $C(I)$. Also: $\mathfrak{B}(C(I)) \subset \mathfrak{G}$. □

Obige Ergebnisse gelten analog[8] im Falle einer Indexmenge $[0, T]$. Für $A \subset C(I)$

$$A \in \sigma(\{f \mapsto f(t) : t \in [0, T]\}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, B \in \mathfrak{B}(C([0, T])) : A = \{f|_{[0,T]} \in B\}. \tag{4}$$

Betrachte Prozeß $(X_t)_{t \in I}$ mit stetigen Pfaden auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist

$$\Psi : \Omega \to C(I) : \omega \mapsto X_.(\omega)$$

wohldefiniert und Proposition 4 sichert die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}(C(I))$-Meßbarkeit von Ψ.

Definition 2. In obiger Situation heißt ΨP die *Verteilung*[9] von X (auf dem Raum $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)))$).

[7] Konvergenz: gleichmäßige Konvergenz auf beliebigen Kompakta.
[8] Normierter Raum $(C([0, T]), \|\cdot\|_\infty)$.
[9] $\Psi P(A) = P(\Psi^{-1} A) = P(\{\omega \in \Omega : X_.(\omega) \in A\})$ für $A \in \mathfrak{B}(C(I))$.

Im folgenden studieren wir Verteilungen auf $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)))$.

Lemma 2. Gegeben Prozesse $X^{(i)}$ auf $(\Omega^{(i)}, \mathfrak{A}^{(i)}, P^{(i)})$ mit stetigen Pfaden, $i = 1, 2$. Dann sind äquivalent

(i) $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ besitzen dieselben endlich-dimensionalen Randverteilungen,

(ii) die Verteilungen von $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ stimmen überein.

Beweis. „(ii) $\Rightarrow$ (i)“ klar.
„(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Die Zylindermengen

$$\{f \in C(I) : (f(t_1), \ldots, f(t_n)) \in A\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in I$ und $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ bilden gemäß Proposition 4 einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathfrak{B}(C(I))$. Nach Voraussetzung stimmen hierauf die Verteilungen von $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ überein. Verwende den Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße, siehe Gänssler, Stute (1977, Satz 1.4.10). $\square$

Definition 3. Das *Wiener-Maß* P_* ist die Verteilung einer Brownschen Bewegung.

Wir halten fest: der durch $W_t(f) = f(t)$ auf $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)), P_*)$ definierte Prozeß ist eine Brownsche Bewegung bezüglich seiner kanonischen Filtration; genannt: *das kanonische Modell der Brownschen Bewegung*. Der Beweis von (iv.a) beruht auf Lemma I.5; der Rest ist klar. Siehe (4) zur kanonischen Filtration.

2.2 Schwache Konvergenz

Im folgenden: (M, ρ) metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}(M)$. Bez.: $\mathfrak{M}(M)$ Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(M, \mathfrak{B}(M))$.

Definition 4. Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}(M)$ *konvergiert schwach* gegen $P \in \mathfrak{M}(M)$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \int_M \varphi \, dP_n = \int_M \varphi \, dP \tag{5}$$

für alle stetigen beschränkten Abbildungen $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Bez.: $P_n \to P$.

Erinnerung Zentraler Grenzwertsatz: schwache Konvergenz der Verteilungen von standardisierten Partialsummen gegen die Standard-Normalverteilung.

Proposition 5. Äquivalent sind[10]

(i) $P_n \to P$,

(ii) (5) gilt für alle gleichmäßig stetigen beschränkten Abbildungen $\varphi : M \to \mathbb{R}$.

(iii) $\forall\ A \subset M$ offen : $\quad \liminf_{n\to\infty} P_n(A) \geq P(A)$,

[10] Notation: ∂A Rand von A.

(iv) $\forall\, A \in \mathfrak{B}(M): \quad P(\partial A) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$

Beweis. Siehe Gänssler, Stute (1977, p. 342–344). □

Fortan (M, ρ) vollständig und separabel.

Proposition 6. Es existiert eine Metrik Δ auf $\mathfrak{M}(M)$, so daß $(\mathfrak{M}(M), \Delta)$ vollständig und separabel ist und

$$P_n \to P \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \Delta(P_n, P) = 0$$

für alle $P, P_1, \ldots \in \mathfrak{M}(M)$ gilt.

Beweis. Siehe Parthasarathy (1967, Sec. II.6). □

Somit: der schwache Limes ist eindeutig bestimmt.
Im folgenden stets obige Metrik auf $\mathfrak{M}(M)$.

Definition 5. $\Pi \subset \mathfrak{M}(M)$ heißt *straff*, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K \subset M \text{ kompakt } \;\forall\, P \in \Pi : P(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Satz I.14 sichert, daß einelementige Teilmengen straff sind.

Satz 3 (Prohorov)**.** Für $\Pi \subset \mathfrak{M}(M)$

$$\Pi \text{ relativ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \Pi \text{ straff}.$$

Beweis. Siehe Parthasarathy (1967, p. 48–49). □

2.3 Das Donskersche Invarianzprinzip

Funktionale Version des Zentralen Grenzwertsatzes.
Gegeben $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ reellwertig, iid. auf Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$E(\xi_j) = 0, \qquad E(\xi_j^2) = \sigma^2 \in\,]0, \infty[\,.$$

Definiere $X : \Omega \to C(I)$ durch[11]

$$X(\omega)(k) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j(\omega), \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$\begin{aligned} X(\omega)(t) &= (t-k)\cdot X(\omega)(k+1) + (k+1-t)\cdot X(\omega)(k) \\ &= X(\omega)(k) + (t-k)\cdot \xi_{k+1}, \qquad t \in [k, k+1]. \end{aligned}$$

[11]Stückweise lineare Interpolation der zugehörigen Irrfahrt.

Skaliere wie folgt

$$X^{(n)}(\omega)(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot X(\omega)(n \cdot t), \qquad t \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 4 sichert die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}(C(I))$-Meßbarkeit von X und $X^{(n)}$, und diese Abbildungen definieren Prozesse mit stetigen Pfaden[12].

Für $s = k/n$ und $t = \ell/n$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ und $k < \ell$ gilt

$$X_t^{(n)} - X_s^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot (\xi_{k+1} + \cdots + \xi_\ell).$$

Also

$$E(X_t^{(n)} - X_s^{(n)}) = 0, \qquad E(X_t^{(n)} - X_s^{(n)})^2 = t - s,$$

und $X_t^{(n)} - X_s^{(n)}$ ist unabhängig von

$$\mathfrak{F}_s^{X^{(n)}} = \sigma(\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}).$$

Beachte

$$X_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \xi_k.$$

Der Zentrale Grenzwertsatz zeigt

$$X_1^{(n)} P \to N(0,1).$$

Satz 4 (Donsker)**.** Sei $P_n = X^{(n)}P$ die Verteilung von $X^{(n)}$, und sei P_* das Wiener-Maß. Dann

$$P_n \to P_*.$$

Beweisskizze. Details bei Karatzas, Shreve (1999, Sec. 2.4).

Wg. Proposition 6 ist zu zeigen: jede Teilfolge von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine Teilfolge, die gegen P_* konvergiert.

Betrachte den Stetigkeitsmodul

$$m_t(f;\delta) = \sup\{|f(r) - f(s)| : r, s \in [0,t],\ |r - s| \le \delta\})$$

von $f \in C(I)$ auf $[0,t]$. Satz 3 und der Satz von Arzela-Ascoli führen auf folgendes Kompaktheitskriterium für beliebige Folgen $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}(C(I))$. Äquivalent sind

1. $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ straff,

2. $$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\{|f(0)| > \lambda\}) = 0$$

   und

   $$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\{m_t(f;\delta) > \varepsilon\}) = 0$$

   für alle $\varepsilon > 0$ und $t \in I$.

[12] Schreibe $X_t(\omega) = X(\omega)(t)$. Analog für $X^{(n)}$

Man verifiziert 2.) für $P_n = Q_n$, und somit gilt: jede Teilfolge von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Betrachte nun die „endlich-dimensionalen Randverteilungen“ der Maße P_n. Dazu sei

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k} : C(I) \to \mathbb{R}^k : f \mapsto (f(t_1), \ldots, f(t_k))$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_k \in I$ paarweise verschieden. Für alle k und t_i zeigt man

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k} P_n \to N(0, K),$$

wobei K durch (1) gegeben ist[13]. Damit folgt die Unabhängigkeit des Grenzwertes von den betrachteten Teilfolgen, vgl. Lemma 2. Ebenso folgt, daß dieser Grenzwert das Wiener-Maß ist. □

Beachte: Obiger Beweis beinhaltet eine weitere Konstruktion der Brownschen Bewegung (und des Wiener-Maßes).

Satz 4 ermöglicht die näherungsweise Berechnung von Funktionalen der Brownschen Bewegung z. Bsp. mittels Monte-Carlo-Methoden (Simulation von Irrfahrten).

3 Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ sowie $d \in \mathbb{N}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

3.1 Mehrdimensionale Brownsche Bewegung

Definition 6. $W = (W_t)_{t\in I}$ *d-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl.* $\mathfrak{F}$ *mit Startverteilung* μ, falls

(i) W $\mathbb{R}^d$-wertig mit stetigen Pfaden,

(ii) W adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(iii) $W_0 P = \mu$,

(iv) für $0 \le s < t$ ist $W_t - W_s$

  (a) unabhängig von $\mathfrak{F}_s$,

  (b) $N(0, (t-s)\,\mathrm{Id}_d)$-verteilt.

Speziell falls $\mu(\{x\}) = 1$: *d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt* $x \in \mathbb{R}^d$.

[13] Für $k = t_1 = 1$ ist dies der Zentrale Grenzwertsatz.