Proposition 7. Die kanonische Filtration $(\mathfrak{F}_t^N)_{t\in I}$ ist rechtsseitig stetig.

Beweis. Wesentlich: die Pfade von N sind lokal rechtsseitig konstant. Siehe Protter (1990, p. 16) für allgemeines Ergebnis für Zählprozesse. □

Obige Konstruktion des Poisson-Prozesses ist universell. Es gibt verteilungsfreie Charakterisierungen des Poisson-Prozesses. Siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. VII.5).

Anwendungen des Poisson-Prozesses: z. Bsp. Warteschlangentheorie, Finanzmathematik, Versicherungsmathematik. Ausblick: Punktprozesse in $\mathbb{R}^d$.

3 Martingale

Gegeben: Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und adaptierter reellwertiger Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$\forall\, t \in I: \quad E(|X_t|) < \infty.$$

Kurzschreibweise: $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$, falls X an $\mathfrak{F}$ adaptiert.

Definition 11. $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ *Submartingal*, falls

$$\forall\, s,t \in I: \quad s < t \;\Rightarrow\; X_s \le E(X_t \mid \mathfrak{F}_s).$$

Supermartingal: „$\ge$“, *Martingal* „$=$“.

Beispiel 6. Für einen Poisson-Prozeß $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit Intensität $\lambda > 0$ und $0 \le s < t$ gilt

$$E(X_t \mid \mathfrak{F}_s) = E(X_t - X_s \mid \mathfrak{F}_s) + E(X_s \mid \mathfrak{F}_s) = E(X_t - X_s) + X_s = \lambda(t-s) + X_s.$$

Also liegt ein Submartingal vor.
Definiere einen *kompensierten Poisson-Prozeß* durch

$$M_t = X_t - \lambda t.$$

Dann ist $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein Martingal.

Die Martingaltheorie im kontinuierlichen Fall $I = [0,\infty[$ wird oft unter Rückgriff auf den vorab betrachteten diskreten Fall entwickelt. Wir diskutieren einige Elemente dieser Theorie.

3.1 Martingale in diskreter Zeit

Zunächst sei $I = \mathbb{N}_0$.

Beispiel 7. *Cox-Ross-Rubinstein Modell:* einfaches Modell für Aktienkurs zu Zeiten $t \in \mathbb{N}_0$. Wähle

$$A_0 > 0, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < d < u,$$

und betrachte $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ iid. mit

$$P(\{Y_t = u\}) = p = 1 - P(\{Y_t = d\}).$$

Definiere $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und

$$A_t = A_0 \cdot \prod_{s=1}^{t} Y_s, \qquad \mathfrak{F}_t = \sigma(\{Y_1, \dots, Y_t\})$$

für $t \in \mathbb{N}$. Klar: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^A$. Für ganzzahlige $0 \leq s < t$

$$E(A_t \mid \mathfrak{F}_s) = A_s \cdot E\left(\prod_{k=s+1}^{t} Y_k\right) = A_s \cdot E(Y_1)^{t-s} = (pu + (1-p)d)^{t-s} \cdot A_s.$$

Also

$$(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0} \text{ Submartingal} \qquad \Leftrightarrow \qquad E(Y_1) \geq 1$$

und

$$(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0} \text{ Martingal} \qquad \Leftrightarrow \qquad d < 1 < u \ \wedge \ p = \frac{1-d}{u-d}.$$

Wir sehen später: ein geeigneter Grenzübergang liefert die geometrische Brownsche Bewegung; auf diesem stochastischen Finanzmarktmodell basiert die Black-Scholes-Formel zur Bewertung europäischer Optionen.

Frage: Gibt es im Martingal-Fall eine Stoppzeit (Verkaufsstrategie) T mit $E(A_T) > A_0$?

Die folgenden Sätze 2, 3 und 5 sind Varianten des *optional sampling theorems*. Beweise der Sätze 2 und 3 findet man im Skript „Probability Theory".

Satz 2.

$$(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0} \text{ Martingal} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, T \text{ beschränkte Stoppzeit} : E(X_T) = E(X_0).$$

Satz 3. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ Martingal und T Stoppzeit mit

$$P(\{T < \infty\}) = 1 \ \wedge \ E(|X_T|) < \infty \ \wedge \ \lim_{t\to\infty} \int_{\{T>t\}} |X_t| \, dP = 0.$$

Dann

$$E(X_T) = E(X_0).$$

Die Struktur der Submartingale ergibt sich wie folgt.

Satz 4 (Doobsche Zerlegung)**.** Für

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} \big(X_s - E(X_s \,|\, \mathfrak{F}_{s-1})\big) + X_0, \qquad A_t = \sum_{s=1}^{t} \big(E(X_s \,|\, \mathfrak{F}_{s-1}) - X_{s-1}\big)$$

gilt

(i) $X_t = M_t + A_t$,

(ii) $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist Martingal,

(iii) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ Submartingal $\quad\Leftrightarrow\quad$ $(A_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ P-f.s monoton wachsend.

Beweis. Nachrechnen. □

Satz 5. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ Submartingal. Für beschränkte Stoppzeiten $S \le T$ gilt[17]

$$X_S \le E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S)$$

und somit

$$E(X_S) \le E(X_T).$$

Im Martingal-Fall gilt jeweils „=“.

Beweis. Zunächst der Submartingalfall. Für Zufallsvariablen X, Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $E(|X|)$, $E(|Y|) < \infty$ gilt

$$X \le Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, A \in \mathfrak{A} : \quad \int_A X\,dP \le \int_A Y\,dP.$$

Ferner: X_S und $E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S)$ sind $\mathfrak{F}_S$-meßbar. Also ist zu zeigen

$$\forall\, A \in \mathfrak{F}_S : \quad \int_A X_S\,dP \le \underbrace{\int_A E(X_T \,|\, \mathfrak{F}_S)\,dP}_{=\int_A X_T\,dP}.$$

Verwende die Doobsche Zerlegung $X = M + A$. Wg. der Monotonie von A

$$A_S \le A_T.$$

Sei $A \in \mathfrak{F}_S$. Wir zeigen

$$\int_A M_S\,dP = \int_A M_T\,dP.$$

Setze

$$R = S \cdot 1_A + T \cdot 1_{\Omega\setminus A}.$$

Da $\Omega \setminus A \in \mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_T$, folgt

$$\{R \le t\} = \underbrace{\{S \le t\} \cap A}_{\in\mathfrak{F}_t} \cup \underbrace{\{T \le t\} \cap (\Omega \setminus A)}_{\in\mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t,$$

so daß R eine beschränkte Stoppzeit ist. Satz 2 liefert

$$E(M_R) = E(M_0) = E(M_T).$$

Klar

$$E(M_R) = E(M_S \cdot 1_A) + E(M_T \cdot 1_{\Omega\setminus A}).$$

Im Martingalfall betrachte man X und $-X$. □

[17] Beachte, daß X_S $\mathfrak{F}_S$-meßbar ist. Vgl. Proposition 6 im kontinuierlichen Fall.

Gegeben: $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit $I = \{t_0, \ldots, t_n\}$ für $t_0 < \cdots < t_n$ sowie $a < b$. Definiere Stoppzeiten

$$\begin{aligned}
T_1 &= \inf\{t \in I : X_t \leq a\}, \\
T_2 &= \inf\{t \in I : X_t \geq b,\ t > T_1\}, \\
&\vdots \\
T_{2k+1} &= \inf\{t \in I : X_t \leq a,\ t > T_{2k}\}, \\
T_{2k+2} &= \inf\{t \in I : X_t \geq b,\ t > T_{2k+1}\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

sowie die Anzahl der *Überquerungen (Upcrossings)* des Intervalls $[a, b]$ von unten nach oben

$$U_I^X(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{falls } T_2 = \infty, \\ \max\{k \in \mathbb{N} : T_{2k} \leq t_n\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 6 (Upcrossing-Inequality)**.** Für jedes Submartingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ gilt

$$E(U_I^X(a,b)) \leq \frac{E((X_{t_n} - a)^+) - E((X_{t_0} - a)^+)}{b - a}.$$

Beweis. O.B.d.A. $a = 0$ und $X \geq 0$ aufgrund der Jensenschen Ungleichung. Definiere Stoppzeiten $S_0 = t_0$ und $S_i = T_i \wedge t_n$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann

$$X_{t_n} - X_{t_0} = \sum_{j=1}^{\infty} (X_{S_{2j}} - X_{S_{2j-1}}) + \sum_{j=0}^{\infty} (X_{S_{2j+1}} - X_{S_{2j}})$$

sowie

$$\sum_{j=1}^{\infty} (X_{S_{2j}} - X_{S_{2j-1}}) \geq b \cdot U_I^X(0,b).$$

Satz 5 sichert

$$E(X_{S_{2j+1}}) \geq E(X_{S_{2j}}).$$

Fazit

$$E(X_{t_n}) - E(X_{t_0}) \geq b \cdot E(U_I^X(0,b)).$$

□

Satz 7 (Submartingal-Ungleichungen)**.** Für jedes Submartingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und $\mu > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
P(\{\max_{i=0,\ldots,n} X_{t_i} \geq \mu\}) &\leq 1/\mu \cdot E(X_{t_n}^+), \\
P(\{\min_{i=0,\ldots,n} X_{t_i} \leq -\mu\}) &\leq 1/\mu \cdot \left(E(X_{t_n}^+) - E(X_{t_0})\right).
\end{aligned}$$

Beweis. Siehe Chung (1974, Theorem 9.4.1). □

Schließlich noch zwei Martingalkonvergenzsätze mit $I = -\mathbb{N}$ bzw. $I = \mathbb{Z}$.

Proposition 8. Gegeben: Submartingal[18] $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in-\mathbb{N}}$ mit

$$\inf_{t\in-\mathbb{N}} E(X_t) > -\infty. \tag{1}$$

Dann existiert $X_{-\infty} \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so daß

$$\lim_{t\to-\infty} X_t = X_{-\infty} \qquad P\text{-f.s. und in } L_1.$$

Beweis. Ohne Verwendung von (1) sichert Satz 6 die Existenz einer Zufallsvariablen $X_{-\infty}$ mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so daß $\lim_{t\to-\infty} X_t = X_{-\infty}$ P-f.s., vgl. Übung 3.3. Mit (1) und Satz 7 zeigt man, daß $X_{-\infty}$ P-f.s. endlich ist, und die gleichgradige Integrierbarkeit von $(X_t)_{t\in-\mathbb{N}}$, siehe Chung (1974, Theorem 9.4.7). □

Proposition 9. Gegeben: Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $E(|Y|) < \infty$. In $L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und P-f.s. gilt

$$\lim_{t\to\infty} E(Y \mid \mathfrak{F}_t) = E\Big(Y \mid \sigma\Big(\bigcup_{t\in\mathbb{Z}} \mathfrak{F}_t\Big)\Big), \qquad \lim_{t\to-\infty} E(Y \mid \mathfrak{F}_t) = E\Big(Y \mid \bigcap_{t\in\mathbb{Z}} \mathfrak{F}_t\Big).$$

Beweis. Siehe Chung (1974, Thm. 9.4.8). □

3.2 Martingale in stetiger Zeit

Im folgenden sei $I = [0, \infty[$.

Satz 8 (Optional Sampling Theorem)**.** Für jedes rechtsseitig stetige Martingal $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ gilt

$$\forall\, T \text{ beschränkte Stoppzeit}: \quad E(X_T) = E(X_0).$$

Beweis. Gelte $T(\omega) \le N$ für alle $\omega \in \Omega$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei T_n definiert durch

$$T_n(\omega) = k/2^n \quad \Leftrightarrow \quad T(\omega) \in [(k-1)/2^n, k/2^n[\,.$$

Für $t \in [(k-1)/2^n, k/2^n[$ zeigt Proposition 3

$$\{T_n \le t\} = \{T_n \le (k-1)/2^n\} = \{T < (k-1)/2^n\} \in \mathfrak{F}_{(k-1)/2^n} \subset \mathfrak{F}_t,$$

d.h. T_n ist Stoppzeit.
Für alle $\omega \in \Omega$:

$$T_n(\omega) \le N + 1 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} T_n(\omega) \searrow T(\omega).$$

Somit wegen der rechtsseitigen Stetigkeit:

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n}(\omega) = X_T(\omega). \tag{2}$$

Satz 5 zeigt

$$E(X_{N+1} \mid \mathfrak{F}_{T_n}) = X_{T_n}.$$

[18] Sogenanntes inverses Submartingal.

Also ist $\{X_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar, siehe Übung 3.1. Mit (2) folgt

$$\lim_{n\to\infty} E(X_{T_n}) = E(X_T).$$

Schließlich zeigt Satz 2

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : E(X_{T_n}) = E(X_0).$$

□

Die folgenden Begriffe und Ergebnisse sind grundlegend bei der Einführung des stochastischen Integrals.

Definition 12. $\mathfrak{F}$ erfüllt die *üblichen Voraussetzungen*, falls

(i) $\mathfrak{F}$ rechtsseitig stetig,

(ii) $\{A \subset \Omega : \exists\, B \in \mathfrak{A} : A \subset B \wedge P(B) = 0\} \subset \mathfrak{F}_0$.

Satz 9. Erfüllt seien

(i) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Submartingal,

(ii) $t \mapsto E(X_t)$ rechtsseitig stetig,

(iii) die üblichen Voraussetzungen.

Dann existiert eine cadlag Modifikation Y von X, so daß $(Y_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein Submartingal ist.

Beweis. Satz 7 sichert die Existenz von $B \in \mathfrak{A}$ mit $P(B) = 1$ und

$$\forall\, \omega \in B\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |X_t(\omega)| < \infty.$$

Details bei Yeh (1995, Prop. 9.1.1). Definiere

$$U_n^X(a,b) = \sup\{U_J^X(a,b) : J \subset [0,n] \cap \mathbb{Q} \text{ endlich}\}$$

sowie

$$C_n(a,b) = \{U_n^X(a,b) < \infty\}, \qquad C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{a<b,\, a,b\in\mathbb{Q}} C_n(a,b).$$

Nach Satz 6 und dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt $P(C) = 1$. Für $\omega \in B \cap C$ existieren die Grenzwerte

$$X_t^{\mathrm{r}}(\omega) = \lim_{s\searrow t,\, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega),$$

für jedes $t \geq 0$. Setze $Y_t(\omega) = X^{\mathrm{r}}(t)(\omega)$ für $\omega \in B\cap C$ und andernfalls $Y_t(\omega) = 0$. Man verifiziert, daß Y ein cadlag Prozeß ist. Die üblichen Voraussetzungen sichern, daß Y zu $\mathfrak{F}$ adaptiert ist.

Sei $s \in I$. Wähle $s_n \in \mathbb{Q}$ mit $s_n \searrow s$. Für $A \in \mathfrak{F}_s$

$$\int_A X_s \, dP \le \int_A E(X_{s_n} \,|\, \mathfrak{F}_s) \, dP = \int_A X_{s_n} \, dP.$$

Die L_1-Konvergenz gem. Proposition 8 liefert $E(|Y_s|) < \infty$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_{s_n} \, dP = \int_A Y_s \, dP, \tag{3}$$

so daß

$$X_s \le Y_s. \tag{4}$$

Gelte $s_n < t$. Gem. (4) folgt

$$E(Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{s_n}) \ge E(X_t \,|\, \mathfrak{F}_{s_n}) \ge X_{s_n}.$$

Zusammen mit Proposition 9 und der rechtsseitigen Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ ergibt sich

$$E(Y_t \,|\, \mathfrak{F}_s) = \lim_{n\to\infty} E(Y_t \,|\, \mathfrak{F}_{s_n}) \ge \lim_{n\to\infty} X_{s_n} = Y_s,$$

d.h. $(Y_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ist ein Submartingal.
Die rechtsseitige Stetigkeit von $s \mapsto E(X_s)$ und (3) liefern

$$E(X_s) = E(Y_s),$$

Mit (4) ergibt sich $Y_s = X_s$. $\square$

Definition 13. $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ *wachsend*, falls

(i) $A_0 = 0$,

(ii) A besitzt rechtsseitig stetige, monoton wachsende[19] Pfade,

(iii) $\forall\, t \in I : E(A_t) < \infty$.

Bemerkung 7. Wir integrieren erstmals bezüglich eines stochastischen Prozesses. Sei $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ wachsend und $(X_t)_{t\in I}$ meßbar. Dann sind die Lebesgue-Stieltjes Integrale[20]

$$I_t^{\pm}(\omega) = \int_0^t X_s^{\pm}(\omega) \, dA_s(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

für $t \in I$ wohldefiniert. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ progressiv meßbar und gelte

$$\forall\, \omega \in \Omega : I_t^{\pm}(\omega) < \infty.$$

Dann ist

$$I_t(\omega) = I_t^{+}(\omega) - I_t^{-}(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

für $t \in I$ wohldefiniert, rechtsseitig stetig und progressiv meßbar.

[19] $A_s(\omega) \le A_t(\omega)$, falls $s \le t$.

[20] Identifiziere $A_\cdot(\omega)$ mit dem durch $\mu^\omega([0,s]) = A_s(\omega)$ definierten σ-endlichen Maß auf $\mathfrak{B}(I)$.

Beispiel 8. Der Poisson-Prozeß $(N_t, \mathfrak{F}_t^N)_{t\in I}$ ist wachsend. Setze

$$J_t(\omega) = \{S_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\} \cap [0,t].$$

Dann gilt $\#J_t(\omega) = N_t(\omega) < \infty$ und

$$I_t(\omega) = \sum_{s\in J_t(\omega)} X_s(\omega).$$

Wir formulieren nun ein kontinuierliches Analogon der Doobschen Zerlegung.
Die Summe eines Martingals M und eines wachsenden Prozesses A (bzgl. derselben Filtration) ist ein Submartingal. Ist jedes Submartingal so darstellbar? Ist diese Darstellung eindeutig?

Beispiel 9. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Poisson-Prozeß mit Intensität $\lambda > 0$. Dann

$$X_t = \underbrace{X_t - \lambda t}_{=M_t} + \underbrace{\lambda t}_{=A_t}.$$

Wir wissen: $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ist ein Martingal. Klar: $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ist wachsend.

Satz 10 (Doob-Meyer-Zerlegung)**.** Erfüllt seien[21]

(i) $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ stetiges Submartingal,

(ii) $\forall\, t \in I : \quad X_t \geq 0$,

(iii) die üblichen Voraussetzungen.

Dann existiert ein stetiges Martingal $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ und ein stetiger wachsender Prozeß $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit

$$\forall\, t \in I\ \forall\, \omega \in \Omega : \quad X_t(\omega) = M_t(\omega) + A_t(\omega).$$

Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit.

Beweisskizze. Details bei Karatzas Shreve (1999, Chap. 1.4). Wir diskutieren die Existenz für $t \in [0,a]$ mit $a > 0$. Betrachte eine rechtsseitig stetige Modifikation $(Y_t)_{t\in[0,a]}$ des Submartingals

$$X_t - E(X_a \,|\, \mathfrak{F}_t), \qquad t \in [0,a],$$

gem. Satz[22] 9. Für $n \in \mathbb{N}$ und $I^{(n)} = \{j/2^n \cdot a : j = 0, \ldots, 2^n\}$ hat man die Doobsche Zerlegung

$$Y_t = M_t^{(n)} + A_t^{(n)}, \qquad t \in I^{(n)}.$$

Ein Kompaktheitsschluß, für den (ii) verwendet wird, zeigt: es ex. eine Teilfolge $(A_a^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(A_a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $Z \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so daß

$$\forall\, \xi \in L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, P) : \quad \lim_{k\to\infty} E(\xi \cdot A_a^{(n_k)}) = E(\xi \cdot Z).$$

[21] Allgemeinere Fassung bei Karatzas, Shreve (1999).
[22] Anwendbar wg. (i) und Proposition 8.

Betrachte rechtsseitig stetige Modifikationen $(M_t)_{t\in[0,a]}$ des Martingals

$$E(X_a - Z \mid \mathfrak{F}_t), \qquad t \in [0,a],$$

sowie $(A_t)_{t\in[0,a]}$ des Submartingals

$$Y_t + E(Z \mid \mathfrak{F}_t), \qquad t \in [0,a],$$

gem. Satz 9. Klar: $X_t = M_t + A_t$ und M ist ein Martingal. Zu zeigen bleibt die linksseitige Stetigkeit von A und M sowie die Monotonie von A; hier geht die Stetigkeit von X ein. □

Im folgenden: $\mathfrak{F}$ erfülle die üblichen Voraussetzungen. Kurz: Martingal statt Martingal bzgl. $\mathfrak{F}$. Gleichheit von Prozessen im Sinne der Ununterscheidbarkeit.

Definition 14. X *quadratisch integrierbar*, falls

$$\forall\, t \in I : E(X_t^2) < \infty.$$

Bez.: $\mathfrak{M}_2^c = \mathfrak{M}_2^c(\mathfrak{F})$ sei der Vektorraum aller stetigen, quadratisch integrierbaren Martingale mit $X_0 = 0$.

Bemerkung 8. Klar: für $X \in \mathfrak{M}_2^c$ ist $X^2 = (X_t^2)_{t\in I}$ stetiges Submartingal.

Definition 15. *Quadratische Variation* von $X \in \mathfrak{M}_2^c$ ist der[23] stetige, wachsende Prozeß $(A_t)_{t\in I}$ in der Doob-Meyer-Zerlegung

$$X_t^2 = M_t + A_t$$

von X^2. Bez.: $\langle X\rangle_t = A_t$.

Vgl. Übung 2.3.b für den kompensierten Poisson-Prozeß.

Definition 16. Für $X, Y \in \mathfrak{M}_2^c$ heißt[24]

$$\langle X, Y\rangle_t = \tfrac{1}{4}(\langle X+Y\rangle_t - \langle X-Y\rangle_t), \quad t \in I,$$

der *Kreuz-Variationsprozeß*. X und Y heißen *orthogonal*, falls

$$\langle X, Y\rangle = 0.$$

Proposition 10. Für $X, Y \in \mathfrak{M}_2^c$ gilt

(i) $\langle X, X\rangle = \langle X\rangle$,

(ii) äquivalent sind

  (a) $XY - Z$ ist Martingal $\wedge$ $Z = A' - A''$ mit A', A'' stetig, wachsend,

  (b) $Z = \langle X, Y\rangle$,

[23]Eindeutig bestimmt bis auf Ununterscheidbarkeit.

[24]Polarisation.

(iii) äquivalent sind

(a) X, Y orthogonal,
(b) XY Martingal,
(c) $E((X_t - X_s) \cdot (Y_t - Y_s) \,|\, \mathfrak{F}_s) = 0$ für alle $0 \leq s < t$, [25]

(iv) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch und bilinear,

(v) $\langle X, Y \rangle^2 \leq \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle$.

Beweis. ad (i):

$$\langle X, X \rangle_t = \tfrac{1}{4} \langle 2X \rangle_t = \langle X \rangle_t.$$

ad (ii): „(b) $\Rightarrow$ (a)“: $(X+Y)^2 - \langle X+Y \rangle$ und $(X-Y)^2 - \langle X-Y \rangle$ sind Martingale, somit auch ihre Differenz

$$(X+Y)^2 - (X-Y)^2 - \langle X+Y \rangle + \langle X-Y \rangle = 4XY - 4\langle X, Y \rangle.$$

„(a) $\Rightarrow$ (b)“: siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 31).
ad (iii): „(a) $\Leftrightarrow$ (b)“ folgt aus (ii).
„(b) $\Leftrightarrow$ (c)“.

$$\begin{aligned} E((X_t - X_s) \cdot (Y_t - Y_s) \,|\, \mathfrak{F}_s) &= E(X_t Y_t + X_s Y_s - X_t Y_s - X_s Y_t \,|\, \mathfrak{F}_s) \\ &= E(X_t Y_t \,|\, \mathfrak{F}_s) - X_s Y_s. \end{aligned}$$

ad (iv): Symmetrie klar. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind

$$(\alpha X) \cdot Y - \langle \alpha X, Y \rangle \quad \text{und} \quad \alpha \cdot (XY) - \alpha \cdot \langle X, Y \rangle$$

gem. (ii) Martingale. Mit (ii) folgt ebenfalls $\alpha \langle X, Y \rangle = \langle \alpha X, Y \rangle$. Beweis der Additivität analog.
ad (v): Folgt wie üblich aus (iv) und $\langle X \rangle_t \geq 0$. □

Definition 17. Sei $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$ mit $0 = t_0 < \cdots < t_m = t$ Zerlegung von $[0, t]$. Ferner sei $p \in \,]0, \infty[$. Dann heißt

$$V_t^{(p)}(X; \pi) = \sum_{k=1}^{m} \left| X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \right|^p$$

p-te Variation von X auf $[0, t]$ bzgl. π. Ferner heißt

$$\|\pi\| = \max_{k=1,\ldots,m} (t_k - t_{k-1})$$

die *Feinheit* von π. Die durch

$$m_t(X; \delta)(\omega) = \sup\{|X_r(\omega) - X_s(\omega)| : r, s \in [0, t],\ |r - s| \leq \delta\}$$

definierte Abbildung $m_t(X; \cdot)(\cdot) : [0, t] \times \Omega \to [0, \infty]$ heißt *Stetigkeitsmodul* von X auf $[0, t]$.

[25] Inkremente sind bedingt „unkorreliert“.

Bemerkung 9. Sei X stetig. Dann ist $m_t(X;\cdot)(\cdot)$ endlich und $m_t(X;\delta)$ ist $\mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{B}(I)$-meßbar. Ferner

$$\forall\, \omega \in \Omega : \lim_{\delta\to 0} m_t(X;\delta)(\omega) = 0.$$

Satz 11. Gelte $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$ für Folge von Zerlegungen π_n von $[0,t]$ und sei $X \in \mathfrak{M}_2^c$. Dann

$$V_t^{(2)}(X;\pi_n) \overset{P\text{-stoch.}}{\to} \langle X\rangle_t.$$

Beweis.
1. Fall: X und $\langle X\rangle$ beschränkt auf $[0,t]$. Genauer

$$P\left(\bigcap_{s\in[0,t]} \{\max\{|X_s|, \langle X\rangle_s\} \le K\}\right) = 1.$$

Wir zeigen hier sogar L_2-Konvergenz. Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned} E\left(V_t^{(2)}(X;\pi) - \langle X\rangle_t\right)^2 &= E\left(\sum_{k=1}^m \underbrace{(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 - (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})}_{=Y_k}\right)^2 \\ &= \sum_{k,\ell=1}^m E(Y_k\cdot Y_\ell). \end{aligned}$$

Wir zeigen

$$\forall\, k \neq \ell : E(Y_k\cdot Y_\ell) = 0. \tag{5}$$

Für $0 \le s < t \le u < v$ gilt[26]

$$\begin{aligned} E((X_v - X_u)^2 \,|\, \mathfrak{F}_t) &= E(X_v^2 - X_u^2 \,|\, \mathfrak{F}_t) \\ &= E(X_v^2 - \langle X\rangle_v - (X_u^2 - \langle X\rangle_u) \,|\, \mathfrak{F}_t) + E(\langle X\rangle_v - \langle X\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_t) \\ &= E(\langle X\rangle_v - \langle X\rangle_u \,|\, \mathfrak{F}_t). \end{aligned}$$

Somit für $k < \ell$ (und analog für $\ell < k$)

$$E(Y_k\cdot Y_\ell \,|\, \mathfrak{F}_{t_k}) = Y_k \cdot E(Y_\ell \,|\, \mathfrak{F}_{t_k}) = 0,$$

so daß (5) folgt.
Also

$$\begin{aligned} &E\left(V_t^{(2)}(X;\pi) - \langle X\rangle_t\right)^2 \\ &\quad= \sum_{k=1}^m E\left((X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 - (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})\right)^2 \\ &\quad\le 2\sum_{k=1}^m E\left((X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^4 + (\langle X\rangle_{t_k} - \langle X\rangle_{t_{k-1}})^2\right) \\ &\quad\le 2\cdot E\left(V_t^{(4)}(X;\pi)\right) + 2\cdot E\left(m_t(\langle X\rangle; \|\pi\|)\cdot \langle X\rangle_t\right). \end{aligned}$$

[26] $E(X_uX_v \,|\, \mathfrak{F}_t) = E(E(X_uX_v \,|\, \mathfrak{F}_u) \,|\, \mathfrak{F}_t) = E(X_u E(X_v \,|\, \mathfrak{F}_u) \,|\, \mathfrak{F}_t) = E(X_u^2 \,|\, \mathfrak{F}_t)$.

Es gilt
$$E\left(V_t^{(2)}(X;\pi)\right)^2 \le 6\cdot K^4,$$
siehe Karatzas, Shreve (1999, Lemma 1.5.9). Ferner
$$V_t^{(4)}(X;\pi) \le m_t(X;\|\pi\|)^2 \cdot V_t^{(2)}(X;\pi)$$
und hiermit
$$\begin{aligned} E(V_t^{(4)}(X;\pi)) &\le \left(E\left(V_t^{(2)}(X;\pi)\right)^2\right)^{1/2} \cdot \left(E\left(m_t(X;\|\pi\|)^4\right)\right)^{1/2} \\ &\le 3K^2 \cdot \left(E\left(m_t(X;\|\pi\|)^4\right)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$
Klar
$$m_t(X;\delta) \le 2K, \qquad m_t(\langle X\rangle;\delta) \le K.$$
Der Lebesguesche Grenzwertsatz und die Stetigkeit der Pfade sichern
$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_t^{(2)}(X;\pi_n) - \langle X\rangle_t\right)^2 = 0.$$
2. Fall: keine Beschränktheitsvoraussetzungen. Rückführung auf 1. Fall (*Lokalisation*). Definiere
$$T_K = \inf\{t \in I : |X_t| \ge K \ \vee\ \langle X\rangle_t \ge K\}, \qquad K \in \mathbb{N}.$$
Proposition 5 zeigt, daß T_K Stoppzeit ist. Die gestoppten Prozesse
$$X_t^{(K)} = X_{T_K\wedge t}, \qquad t \in I,$$
und
$$X_{T_K\wedge t}^2 - \langle X\rangle_{T_K\wedge t}, \qquad t \in I,$$
sind beschränkte Martingale, siehe Übung 3.2. Die Eindeutigkeit der Doob-Meyer-Zerlegung liefert
$$\langle X\rangle_{T_K\wedge t} = \langle X^{(K)}\rangle_t.$$
Gemäß Fall 1.) gilt für festes $K \in \mathbb{N}$
$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_t^{(2)}(X^{(K)};\pi_n) - \langle X^{(K)}\rangle_t\right)^2 = 0.$$
Setze
$$B_n^\varepsilon = \{|V_t^{(2)}(X;\pi_n) - \langle X\rangle_t| \ge \varepsilon\}, \qquad A_K = \{T_K < t\}.$$
Es gilt $\lim_{K\to\infty} T_K(\omega) = \infty$ für alle $\omega \in \Omega$ wegen der Stetigkeit der Pfade von X und $\langle X\rangle$, also
$$\lim_{K\to\infty} P(A_K) = 0.$$
Weiter
$$\begin{aligned} P(B_n^\varepsilon) &= P(B_n^\varepsilon \cap A_K) + P(B_n^\varepsilon \setminus A_K) \\ &\le P(A_K) + P(\{|V_t^{(2)}(X^{(K)};\pi_n) - \langle X^{(K)}\rangle_t| \ge \varepsilon\}), \end{aligned}$$
und somit
$$\limsup_{n\to\infty} P(B_n^\varepsilon) \le P(A_K).$$
□

Abschließend: Die Wahl von $p = 2$ bei der Variation ist angemessen für stetige, quadratisch integrierbare Martingale.

Satz 12. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ Prozeß mit stetigen Pfaden, $p > 0$ und L_t Zufallsvariable, so daß

$$V_t^{(p)}(X; \pi_n) \overset{P\text{-stoch.}}{\to} L_t$$

falls $\|\pi_n\| \to 0$. Dann gilt für $q > p$

$$V_t^{(q)}(X; \pi_n) \overset{P\text{-stoch.}}{\to} 0$$

und[27] für $0 < q < p$

$$V_t^{(q)}(X; \pi_n) \cdot 1_{\{L_t>0\}} \overset{P\text{-stoch.}}{\to} \infty \cdot 1_{\{L_t>0\}},$$

falls $\|\pi_n\| \to 0$.

Beweis. Übung 4.2. □

Eine wichtige Konsequenz der Sätze 11 und 12: die Definition von stochastischen Integralen bzgl. stetiger quadratisch-integrierbarer Martingale X, etwa mit $\langle X\rangle_t > 0$ für alle $t > 0$, kann nicht pfadweise unter Rückgriff auf die deterministische Lebesgue-Stieltjes-Theorie erfolgen.

4 Der Kolmogorovsche Konsistenzsatz

Gegeben: Meßraum $(S, \mathfrak{S})$ und beliebige Menge $I \neq \emptyset$, sowie zunächst ein stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zustandsraum $(S, \mathfrak{S})$.
Für $\emptyset \neq J \subset I$ sei $X_J : \Omega \to S^J$ durch

$$(X_J(\omega))(t) = X_t(\omega)$$

für $\omega \in \Omega$ und $t \in J$ definiert.

Bemerkung 10. X_J ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^J$-meßbar.

Definition 18. In obiger Situation heißt das Bildmaß[28] $X_I P$ auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$ die *Verteilung* von X (auf dem Raum $(S^I, \mathfrak{S}^I)$).

Bemerkung 11. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$. Betrachte den durch

$$X_t(\omega) = \omega(t)$$

für $\omega \in S^I$ und $t \in I$ definierten *kanonischen Prozeß*. Klar: $X_I\mu = \mu$, da $X_I = \mathrm{Id}$.

Also: Konstruktion von stochastischen Prozessen durch Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$.

[27] $\infty \cdot 0 = 0$.
[28] Also $(X_I P)(A) = P(\{\omega \in \Omega : X_\cdot(\omega) \in A\})$ für $A \in \mathfrak{S}^I$.

Beispiel 10.

(i) Produktmaße: hier I und $(S, \mathfrak{S})$ beliebig, aber man erhält nur Prozesse mit unabhängigen Zufallselementen.

(ii) Markov–Kerne: Satz von Ionesu–Tulcea für $I = \mathbb{N}$ und $(S, \mathfrak{S})$ beliebig.

Nun: I beliebig, S geeigneter topologischer Raum und $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(S)$.
Setze $\mathfrak{P}_0(I) = \{J \subset I : J \neq \emptyset \text{ endlich}\}$, betrachte die Projektionen

$$\pi^{J_1}_{J_2} : S^{J_1} \to S^{J_2} \qquad (z_j)_{j \in J_1} \mapsto (z_j)_{j \in J_2}$$

für $\emptyset \neq J_2 \subset J_1 \subset I$. Kurz: $\pi_J = \pi^I_J$.

Definition 19. $(X_J P)_{J \in \mathfrak{P}_0(I)}$ heißt[29] *die Familie der endlich-dimensionalen Randverteilungen* von X.

Bemerkung 12.

(i) Für $J = \{t_1, \dots, t_n\}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{S}$

$$X_J P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P(\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A_1 \times \cdots \times A_n\}).$$

(ii) Sei $X' = (X'_t)_{t \in I}$ ein Prozeß auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ mit Zustandsraum $(S, \mathfrak{S})$. Dann

$$X_I P = X'_I P' \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ J \in \mathfrak{P}_0(I) : \quad X_J P = X'_J P'.$$

Frage: Existenz eines Prozesses mit vorgegebenen endlich-dimensioanlen Randverteilungen?

Definition 20. Familie $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}_0(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_J auf $(S^J, \mathfrak{S}^J)$ heißt *projektiv*, falls

$$\forall\ J_1, J_2 \in \mathfrak{P}_0(I) : \quad J_2 \subset J_1 \Rightarrow \mu_{J_2} = \pi^{J_1}_{J_2} \mu_{J_1}.$$

Klar: X stochastischer Prozeß $\Rightarrow (X_J P)_{J \in \mathfrak{P}_0}$ projektiv.

Definition 21. Topologischer Raum $(M, \mathfrak{O})$ heißt *polnisch*, falls eine Metrik ρ auf M existiert, so daß

(i) ρ die Topologie $\mathfrak{O}$ erzeugt,

(ii) (M, ρ) vollständig und separabel.

Beispiel 11. $M = \mathbb{R}^d$, jeder separable Banachraum, $M = C([0, \infty[)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta, siehe Proposition II.3.

[29] Oft identifiziert man $X_J P$ mit einer Verteilung auf $\mathbb{R}^{|J|}$.

Satz 13 (Äußere Regularität von Borel-Maßen)**.** Sei (M, ρ) ein metrischer Raum und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{B}(M))$. Dann gilt

$$\nu(A) = \inf\{\nu(O) : O \supset A,\ O \text{ offen}\} = \sup\{\nu(C) : C \subset A,\ A \text{ abgeschlossen}\}.$$

Beweis. Übung 4.4. □

Satz 14 (Innere Regularität von Borel-Maßen)**.** Sei $(M, \mathfrak{O})$ ein polnischer Raum und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M, \mathfrak{B}(M))$. Dann gilt

$$\nu(A) = \sup\{\nu(C) : C \subset A,\ C \text{ kompakt}\}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für $A = M$, also

$$1 = \sup\{\nu(C) : C \subset M,\ C \text{ kompakt}\}. \tag{6}$$

OBdA: (M, ρ) vollständiger separabler metrischer Raum. Wähle $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dicht in M. Setze

$$B_{n,i} = \{m \in M : \rho(m, m_i) < 1/n\}$$

für $i, n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $i_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\nu\big(M \setminus \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}\big) \leq \varepsilon \cdot 2^{-n}.$$

Setze

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}.$$

Dann

$$\nu(M \setminus \overline{B}) \leq \nu(M \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(M \setminus \bigcup_{i=1}^{i_n} B_{n,i}) \leq \varepsilon.$$

Um (6) zu folgern, bleibt zu zeigen, daß $\overline{B}$ kompakt ist. Dazu zeigen wir, daß jede Folge $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in B eine Cauchy-Teilfolge enthält und verwenden dann die Vollständigkeit von (M, ρ).

Nach Definition von B existiert $i_1^* \in \{1, \ldots, i_1\}$, so daß $|\{j \in \mathbb{N} : z_j \in B_{1,i_1^*}\}| = \infty$, d.h. es existiert eine Teilfolge, die stets in B_{1,i_1^*} liegt. Durch Iteration und Diagonalisierung bekommt man so eine Folge von Indizes

$$i_n^* \in \{1, \ldots, i_n\}$$

und eine Teilfolge $(z_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$, welche für alle $n \geq k$

$$z_{j_n} \in B_{k,i_k^*}$$

erfüllt. Also ist $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Nun sei $A \in \mathfrak{B}(M)$ beliebig. Nach Satz 13 existiert für $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $C \subset A$ mit $\nu(A \setminus C) \leq \varepsilon$. Wegen (6) existiert eine kompakte Menge $K \subset M$ mit $\nu(M \setminus K) \leq \varepsilon$. Fazit: $D = C \cap K \subset A$ ist kompakt und erfüllt

$$\nu(A \setminus D) \leq 2\varepsilon.$$

□

Satz 15 (Konsistenzsatz von Daniell 1918, Kolmogorov 1933)**.** Sei $(S, \mathfrak{O})$ ein polnischer Raum, $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(S)$, und $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}_0(I)}$ eine projektive Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_J auf $(S^J, \mathfrak{S}^J)$. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(S^I, \mathfrak{S}^I)$, so daß

$$\forall\ J \in \mathfrak{P}_0(I) : \quad \pi_J \mu = \mu_J.$$

Für den Beweis benötigen wir zwei Lemmata.

Lemma 3. Ist $(S, \mathfrak{O})$ ein polnischer Raum und $J \neq \emptyset$ eine endliche Menge, so ist $(S^J, \mathfrak{O}^J)$ ein polnischer Raum und $\mathfrak{B}(S^J) = (\mathfrak{B}(S))^J$.

Beweis. Siehe Gänssler, Stute (1977, Satz 1.3.12). Es gilt stets $\mathfrak{B}(S^J) \supset (\mathfrak{B}(S))^J$ und bei polnischen Räumen auch $\mathfrak{B}(S^J) \subset (\mathfrak{B}(S))^J$. □

Lemma 4. Sei (S, ρ) ein metrischer Raum, $I \neq \emptyset$, $J_n \in \mathfrak{P}_0(I)$ sowie $K_n \subset S^{J_n}$ kompakt. Setze

$$Y_n = \bigcap_{\ell=1}^{n} (\pi_{J_\ell})^{-1}(K_\ell).$$

Falls $Y_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist[30] $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in S^I mit $y_n \in Y_n$. Für $m \geq n$ ist $y_m \in Y_n$, also folgt für $t \in J_n$

$$y_m(t) = \pi^{J_n}_{\{t\}} \circ \pi_{J_n}(y_m) \in \pi^{J_n}_{\{t\}}(K_n),$$

und $\pi^{J_n}_{\{t\}}(K_n)$ ist kompakt. Setze $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Es existiert eine Teilfolge $(y_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$, so daß für jedes $t \in J$ die Folge $(y_{n_\ell}(t))_{\ell \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Fixiere $a \in S$ und definiere $z \in S^I$ durch

$$z(t) = \lim_{\ell \to \infty} y_{n_\ell}(t),$$

falls $t \in J$, und andernfalls durch $z(t) = a$. Da K_n abgeschlossen, folgt $\pi_{J_n}(z) \in K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$. □

Beweis von Satz 15. Eindeutigkeit: siehe Bemerkung 12. Existenz: Wir betrachten die Algebra

$$\mathfrak{S}^I_0 := \bigcup_{J \in \mathfrak{P}_0(I)} \sigma(\{\pi_J\})$$

der Zylindermengen. Für $A \in \mathfrak{S}^I_0$ von der Form $A = \pi_J^{-1}(B)$ für $B \in \mathfrak{S}^J$ und $J \in \mathfrak{P}_0(I)$ setzen wir

$$\widehat{\mu}(A) := \mu_J(B).$$

Dies ist wohldefiniert, da $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}(I)}$ eine projektive Familie ist. Klar: $\widehat{\mu}$ ist Inhalt auf $\mathfrak{S}^I_0$. Nach dem Maßfortsetzungssatz genügt es nun zu zeigen, daß $\widehat{\mu}$ stetig in $\emptyset$ ist. Seien also $Z_n \in \mathfrak{S}^I_0$ mit $Z_n \downarrow \emptyset$. Annahme: $\inf_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mu}(Z_n) = \alpha > 0$. Es sei

$$Z_n = \pi_{J_n}^{-1}(B_n)$$

[30]Dies verallgemeinert den Cantorschen Durchschnittssatz, der den Falle $|I| = 1$ behandelt.

mit $B_n \in \mathfrak{S}^{J_n}$. OBdA können wir $J_1 \subset J_2 \subset \ldots$ voraussetzen. Nach Lemma 3 und Satz 14 existieren kompakte Mengen $K_n \subset S^J$ mit $\mu_{J_n}(B_n \setminus K_n) \leq 2^{-n} \cdot \alpha$. Setze $Z'_n = \pi_{J_n}^{-1}(K_n)$, dann folgt

$$\widehat{\mu}(Z_n \setminus Z'_n) \leq 2^{-n} \cdot \alpha.$$

Damit hat man für Y_n gemäß Lemma 4

$$\widehat{\mu}(Z_n) - \widehat{\mu}(Y_n) = \widehat{\mu}\left(\bigcup_{\ell=1}^{n}(Z_n \setminus Z'_\ell)\right) \leq \sum_{\ell=1}^{n} \widehat{\mu}(Z_\ell \setminus Z'_\ell) < \alpha.$$

Da $\widehat{\mu}(Z_n) \geq \alpha$, folgt hieraus $\widehat{\mu}(Y_n) > 0$ und damit $Y_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Lemma 4 folgt nun $\bigcap_n Y_n \neq \emptyset$, ein Widerspruch. □

Definition 22. In der Situation von Satz 15 heißt μ der *projektive Limes* der Familie $(\mu_J)_{J \in \mathfrak{P}(I)}$, Bez.: $\mu = \lim_{J \in \mathfrak{P}(J)} \mu_J$.

Anwendung: Prozesse mit unabhängigen Inkrementen. Im folgenden $I = [0, \infty[$ und $(S, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$.

Definition 23. $(X_t)_{t \in I}$ besitzt

(i) *unabhängige Inkremente*, falls

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$.

(ii) *stationäre Inkremente*, falls für alle $0 \leq s < t$ die Verteilungen von $X_t - X_s$ und $X_{t-s} - X_0$ übereinstimmen.

Lemma 5. Für $X = (X_t)_{t \in I}$ mit X_0 P-f.s. konstant gilt

X besitzt unabhängige Inkremente $\Leftrightarrow$ $\forall\, 0 \leq s < t : X_t - X_s$ unabhängig von $\mathfrak{F}_s^X$.

Beweis. „$\Leftarrow$“: induktiv. „$\Rightarrow$“ Fixiere s und setze

$$\mathfrak{D} = \{A \in \mathfrak{F}_s^X : 1_A, X_t - X_s \text{ unabhängig}\},$$
$$\mathfrak{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N},\ 0 = s_0 < \cdots < s_n = s} \sigma(\{X_{s_0}, \ldots, X_{s_n}\}).$$

Klar: $\mathfrak{D}$ ist Dynkin-System, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}_s^X$, $\sigma(\mathfrak{C}) = \mathfrak{F}_s^X$, $\mathfrak{C}$ ist $\cap$-stabil. Wir zeigen $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$ und schließen dann

$$\mathfrak{F}_s^X = \sigma(\mathfrak{C}) = \delta(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}_s^X.$$

Nach Voraussetzung gilt für $0 = s_0 < \cdots < s_n = s < t$

$$X_0, X_{s_1} - X_{s_0}, \ldots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}, X_t - X_s \text{ unabhängig.}$$

Ferner

$$\sigma(\{X_0, X_{s_1} - X_{s_0}, \ldots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}\}) = \sigma(\{X_0, X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\}).$$

□

Sei X ein Prozeß mit unabhängigen Inkrementen. Setze

$$\nu_{s,t} = P_{X_t - X_s}, \qquad 0 \leq s \leq t.$$

Beispiel 12. Poisson-Prozeß besitzt stationäre, unabhängige Inkremente. Stationarität: klar, da $X_t - X_s$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t-s)$. Unabhängigkeit: beachte $\mathfrak{F}_s^X \subset \mathfrak{F}_s$ für an $\mathfrak{F}$ adaptierte Prozesse X und wende Lemma 5 an.

Bemerkung 13.

(i) Offenbar gilt $\nu_{s,t} = \nu_{s,r} * \nu_{r,t}$ für $0 \leq s < r < t$.

(ii) Falls $X_0 = 0$, so ist die Verteilung von X durch $(\nu_{s,t})_{0 \leq s < t}$ eindeutig bestimmt.

Satz 16. Sei $(\nu_{s,t})_{0 \leq s < t}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ mit

$$\forall\, 0 \leq s < r < t: \quad \nu_{s,t} = \nu_{s,r} * \nu_{r,t}. \tag{7}$$

Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und ein darauf definierter stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$, so daß

(i) $X_0 = 0$.

(ii) X hat unabhängige Inkremente.

(iii) $\forall\, 0 \leq s < t: \quad P_{X_t - X_s} = \nu_{s,t}$.

Durch diese Forderungen ist die Verteilung des Prozesses eindeutig bestimmt.

Beweis. Wende Satz 15 und Bemerkung 13 an. □

Bemerkung 14. Spezialfall: Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen und $X_0 = 0$ Hier wird X in seiner Verteilung schon durch $\nu_t = \nu_{t,0}$ bestimmt. Die Familie $(\nu_t)_{t>0}$ heißt *Faltungshalbgruppe* ($\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$). Beispiel: Poisson-Prozeß