Stochastische Analysis

Klaus Ritter

Darmstadt, SS 2009

Vorkenntnisse

Wahrscheinlichkeitstheorie.

Literatur

Insbesondere:

I. Karatzas, S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, New York, 1999.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Stochastische Prozesse

Literatur:

Karatzas, Shreve (1999, Chap. 1).

1 Grundlegende Definitionen

1.1 Stochastische Prozesse und Filtrationen

Definition 1. Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, Meßraum $(S, \mathfrak{S})$ sowie Menge I.

(i) *Stochastischer Prozeß* mit *Zustandsraum* $(S, \mathfrak{S})$ und *Parametermenge* I: Familie $X = (X_t)_{t \in I}$ von $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-meßbaren Abbildungen[1] $X_t : \Omega \to S$.

(ii) *Trajektorie (Pfad, Realisierung)* von X: Abbildung $I \to S$, $t \mapsto X_t(\omega)$ mit festem $\omega \in \Omega$.

Beispiel 1.

(i) $I = \mathbb{N}$: Grenzwertsätze der Stochastik.

(ii) $I = \{1, \dots, n\}^2$: Bildverarbeitung, siehe Winkler (1995).

(iii) $I = \mathbb{Z}^d$: statistische Physik, siehe Georgii (1988).

(iv) $I = \mathbb{R}^d$: Geostatistik, siehe Cressie (1993).

Fortan,[2] bis auf Abschnitt **??**,

$$I \subset \mathbb{R}, \quad S = \mathbb{R}^d, \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \text{ Borelsche } \sigma\text{-Algebra.}$$

In erster Linie

$$I = [0, t_0] \quad \text{bzw.} \quad I = [0, \infty[\,.$$

[1]Alternative Schreibweisen: $X(t)$, $X(t, \cdot)$.

[2]Notation: Inklusion $\subset$ nicht notwendig strikt.

Beispiel 2. Finanzmarkt mit d Finanzgütern. Modelliert durch Preisprozeß X: für $j \in \{1, \ldots, d\}$ ist $X_{j,t}$ der Preis des j-ten Finanzgutes zur Zeit $t \in I$.

Gegeben: Prozesse $X = (X_t)_{t \in I}$ und $Y = (Y_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Definition 2.

(i) X und Y *ununterscheidbar*, falls P-f.s.[3]

$$\forall\, t \in I : \quad X_t = Y_t.$$

(ii) Y *Modifikation (Version)* von X, falls

$$\forall\, t \in I : \quad P(\{X_t = Y_t\}) = 1.$$

(iii) X und Y *besitzen dieselben endlich-dimensionalen Randverteilungen*, falls[4]

$$\begin{aligned} &\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, t_1, \ldots, t_n \in I \quad \forall\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{nd}) : \\ &\qquad P(\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B\}) = P(\{(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in B\}). \end{aligned}$$

Bemerkung 1. Klar: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Umkehrungen i.a. falsch. Jedoch: (i) $\Leftrightarrow$ (ii), falls X und Y P-f.s. rechtsseitig (linksseitig) stetige Pfade besitzen. Siehe Übung 1.1, 1.2.

Definition 3.

(i) *Filtration*: Familie $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ von σ-Algebren $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{A}$ mit

$$\forall\, s, t \in I : \quad s < t \;\Rightarrow\; \mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t.$$

(ii) X *adaptiert* zu Filtration $\mathfrak{F}$, falls X_t $\mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{S}$-meßbar für alle $t \in I$.

(iii) *Kanonische Filtration* zu X:

$$\mathfrak{F}_t^X = \sigma\left(\{X_s : s \leq t\}\right), \qquad t \in I.$$

Bemerkung 2. Klar: $\mathfrak{F}^X$ ist die kleinste Filtration, zu der X adaptiert ist.

Proposition 1. Gegeben: Menge Ω_1 und Meßraum $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$. Für Abbildungen $U : \Omega_1 \to \Omega_2$, $V : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ sind äquivalent

(i) V ist $\sigma(\{U\})$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar,

(ii) $\exists\, g : \Omega_2 \to \mathbb{R} : \quad g$ $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar $\wedge$ $V = g \circ U$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): klar. (i) $\Rightarrow$ (ii): Algebraische Induktion, d.h. zunächst für Elementarfunktionen, dann für nicht-negative meßbare Funktionen über monotone Limiten, schließlich der allgemeine Fall durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil. Details im Skript „Probability Theory“. $\square$

[3]Eigenschaft a gilt P-f.s.: $\exists\, A \in \mathfrak{A} : \; P(A) = 1 \wedge A \subset \{\omega \in \Omega : \omega$ erfüllt $a\}$.

[4]Analog für Prozesse auf verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen.

Bemerkung 3. Setze[5][6] $\Omega_2 = S^{[0,t]}$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{S}^{[0,t]}$, definiere $U : \Omega \to \Omega_2$ durch

$$(U(\omega))(s) = X_s(\omega).$$

Dann $\sigma(\{U\}) = \mathfrak{F}_t^X$, denn für jede σ-Algebra $\mathfrak{A}'$ in Ω gilt

$$U \ \mathfrak{A}'\text{-}\mathfrak{A}_2\text{-meßbar} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, s \in [0,t] : X_s \ \mathfrak{A}'\text{-}\mathfrak{S}\text{-meßbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{A}'.$$

Somit für $A \subset \Omega$

$$A \in \mathfrak{F}_t^X \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, B \in \mathfrak{A}_2 : A = U^{-1}(B).$$

Für $V : \Omega \to \mathbb{R}$ zeigt Proposition 1, daß V genau dann $\mathfrak{F}_t^X$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar ist, wenn

$$\forall\, \omega \in \Omega : \quad V(\omega) = g\left(X_\cdot(\omega)|_{[0,t]}\right)$$

mit einer $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbaren Abbildung $g : S^{[0,t]} \to \mathbb{R}$.

Beispiel 3. Filtration $\mathfrak{F}$ beschreibt den Informationsverlauf in einem Finanzmarkt, alle „Aktionen“ zur Zeit $t \in I$ müssen $\mathfrak{F}_t$-meßbar sein. Sinnvolle Forderung: Preisprozeß X adaptiert zu $\mathfrak{F}$, d.h. $\mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{F}_t$ für alle $t \in I$.

Kontinuierliches Finanzmarktmodell für d Finanzgüter mit Zeithorizont $t_0 > 0$: Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ und dazu adaptierter $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozeß $X = (X_t)_{t\in I}$, wobei $I = [0, t_0]$.

Handelsstrategie $H = (H_t)_{t\in I}$ in obigem Modell: $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozeß auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum. Für $j \in \{1, \dots, d\}$: $H_{t,j}$ Bestand an Finanzgut j zur Zeit $t \in I$. Sinnvolle Forderung: H zu $\mathfrak{F}$ adaptiert.

Im folgenden sei $I = [0, \infty[$. Gegeben: Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ in $\mathfrak{A}$.

Definition 4. $\mathfrak{F}$ *rechtsseitig stetig*, falls

$$\forall\, t \in I : \quad \mathfrak{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{F}_{t+\varepsilon}.$$

Definition 5.

(i) X *meßbar*, falls

$$I \times \Omega \to S, \quad (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

$(\mathfrak{B}(I) \otimes \mathfrak{A})$-$\mathfrak{S}$-meßbar ist.

(ii) X *progressiv meßbar* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls für jedes $t \geq 0$ die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \to S, \quad (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

$(\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t)$-$\mathfrak{S}$-meßbar ist.

Bemerkung 4. Klar: progressiv meßbar $\Rightarrow$ meßbar und adaptiert[7].

[5] Analog mit anderen Pfadräumen, etwa $\Omega_2 = C([0,t])$ und $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}(\Omega_2)$. Siehe Prop. **??**.**??**.

[6] Notation $\mathfrak{S}^{[0,t]} = \bigotimes_{s\in[0,t]} \mathfrak{S}$.

[7] Ferner: meßbar und adaptiert $\Rightarrow$ Existenz einer progressiv meßbaren Modifikation, siehe Karatzas, Shreve (1999, p. 5).

Kurz: X *stetig*, falls alle Pfade von X stetig sind. Analog für rechtsseitige und linksseitige Stetigkeit.

Proposition 2.

$$X \text{ adaptiert und rechtsseitig (linksseitig) stetig} \quad \Rightarrow \quad X \text{ progressiv meßbar.}$$

Beweis. Im Falle rechtsseitiger Stetigkeit. Fixiere $t > 0$, setze $I_0^{(n)} = \{0\}$ und $I_k^{(n)} =](k-1)/2^n \cdot t, k/2^n \cdot t]$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, 2^n$. Definiere

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_{k/2^n \cdot t}(\omega), \quad \text{falls } s \in I_k^{(n)}.$$

Dann folgt für alle $\omega \in \Omega$ und $s \in [0, t]$

$$\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega).$$

Ferner gilt für $B \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned}
\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : X_s^{(n)}(\omega) \in B\} &= \bigcup_{k=0}^{2^n} \{(s,\omega) \in I_k^{(n)} \times \Omega : X_{k/2^n \cdot t}(\omega) \in B\} \\
&= \bigcup_{k=0}^{2^n} \left(I_k^{(n)} \times \{X_{k/2^n \cdot t} \in B\} \right) \in \mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t.
\end{aligned}$$

□

Definition 6. X *cadlag*[8] Prozeß, falls jeder Pfad in jedem Punkt $t \geq 0$ rechtsseitig stetig ist und in jedem Punkt $t > 0$ einen linksseitigen Grenzwert besitzt.

1.2 Stoppzeiten

Gegeben: Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ auf Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}$. Betrachte Abbildungen $T : \Omega \to I \cup \{\infty\}$.

Definition 7.

(i) T *Stoppzeit* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls

$$\forall\, t \in I : \quad \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

(ii) T *optionale Zeit* (bzgl. $\mathfrak{F}$), falls

$$\forall\, t \in I : \quad \{T < t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Im folgenden sei $I = [0, \infty[$.

[8] Continu à droite, limites à gauche.

Bemerkung 5. Betrachte die kanonische Filtration $\mathfrak{F}^X$. Genau dann ist T Stoppzeit bzgl. $\mathfrak{F}^X$, wenn für jedes $t \in I$ eine Menge $B \in \mathfrak{S}^{[0,t]}$ mit

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega : X_.(\omega)|_{[0,t]} \in B\}$$

existiert, siehe Bemerkung 3.

Beispiel 4. T Verkaufsstrategie für eine Aktie oder Ausübungsstrategie für amerikanische Option. Letztere gibt dem Inhaber der Option das Recht, innerhalb eines Zeitraumes $[0, t_0]$ ein Basisgut (etwa eine Aktie) zu einem festgelegten Basispreis zu kaufen (Call) bzw. zu verkaufen (Put). Sinnvolle Forderung: T Stoppzeit.

Proposition 3.

$$T \text{ Stoppzeit} \qquad \Rightarrow \qquad T \text{ optionale Zeit.}$$

Hier gilt „$\Leftrightarrow$" im Falle einer rechtsseitig stetigen Filtration.

Beweis. „$\Rightarrow$"

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{T \leq t - 1/n\}}_{\in \mathfrak{F}_{t-1/n}} \in \mathfrak{F}_t.$$

„$\Leftarrow$" Für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \underbrace{\{T < t + 1/n\}}_{\in \mathfrak{F}_{t+1/n}} \in \mathfrak{F}_{t+1/m}.$$

Mit der Stetigkeitsannahme folgt $\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$. □

Proposition 4. Mit $S, T, T_1, \ldots$ sind auch $S+T$ und $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ Stoppzeiten bzgl. $\mathfrak{F}$. Im Falle einer rechtsseitig stetigen Filtration gilt dies auch für $\inf_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Beweis. Für die Summe. Es gilt

$$\begin{aligned}&\{S + T > t\}\\ &\quad = \underbrace{\{S = 0, T > t\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \cup \{0 < S < t, S + T > t\} \cup \underbrace{\{S = t, T > 0\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \cup \underbrace{\{S > t\}}_{\in \mathfrak{F}_t}\end{aligned}$$

sowie

$$\{0 < S < t, S + T > t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]0,t[} \underbrace{\{r < S < t, T > t - r\}}_{\in \mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t.$$

□

Definition 8. *Eintrittszeit* in $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$:[9]

$$H_\Gamma(\omega) = \inf\{t \in I : X_t(\omega) \in \Gamma\}.$$

Beispiel 5. Verkaufe Aktie, sobald erstmals der Preis a erreicht oder überschritten ist, also $\Gamma = [a, \infty[$ im Falle $d = 1$.

[9] Wie üblich: $\inf \emptyset = \infty$.

Proposition 5. Sei X zu $\mathfrak{F}$ adaptiert. Dann

(i) X rechtsseitig stetig $\wedge$ Γ offen $\Rightarrow$ H_Γ optionale Zeit.

(ii) X stetig $\wedge$ Γ abgeschlossen $\Rightarrow$ H_Γ Stoppzeit.

Beweis. ad (i): Es gilt

$$\{H_\Gamma < t\} = \bigcup_{s\in[0,t[} \{X_s \in \Gamma\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t[} \underbrace{\{X_s \in \Gamma\}}_{\in\mathfrak{F}_s} \in \mathfrak{F}_t.$$

ad (ii): Übung 1.4.b). □

Gegeben: Stoppzeit T.

Definition 9. *σ-Algebra der T-Vergangenheit*:

$$\mathfrak{F}_T = \{A \in \mathfrak{A} : \forall\, t \in I : A \cap \{T \le t\} \in \mathfrak{F}_t\}.$$

Bemerkung 6. Klar: $\mathfrak{F}_T$ ist σ-Algebra und T ist $\mathfrak{F}_T$-$\mathfrak{B}(I \cup \{\infty\})$-meßbar.

Betrachte den Prozeß X zur Stoppzeit T,

$$X_T : \{T < \infty\} \to S, \qquad X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega),$$

und den gestoppten Prozeß[10]

$$(X_{T\wedge t})_{t\in I}.$$

Proposition 6. Sei X progressiv meßbar. Dann

(i) X_T ist $\mathfrak{F}_T$-$\mathfrak{S}$-meßbar.

(ii) $(X_{T\wedge t})_{t\in I}$ ist progressiv meßbar.

Beweis. ad (ii): Fixiere $t > 0$, setze $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}([0,t])$. Die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \to [0,t] \times \Omega, \quad (s,\omega) \mapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$$

ist $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-meßbar[11]. Die Abbildung

$$[0,t] \times \Omega \to S, \quad (z,\omega) \mapsto X_z(\omega)$$

ist n.V. $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{F}_t$-$\mathfrak{S}$-meßbar. Betrachte die Komposition.
ad (i): Es gilt

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \le t\} = \underbrace{\{X_{T\wedge t} \in B\}}_{\in\mathfrak{F}_t \text{ wg. (ii)}} \cap \underbrace{\{T \le t\}}_{\in\mathfrak{F}_t} \in \mathfrak{F}_t$$

für $B \in \mathfrak{S}$. □

[10] Notation $\wedge$ für min.
[11] $\{T \wedge s \le u\} = [0,t] \times \{T \le u\} \cup [0,u] \times \Omega$.

2 Der Poisson-Prozeß

Betrachte Folge $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von iid. Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, jeweils exponentialverteilt[12] mit Parameter $\lambda > 0$. Setze $S_0 = 0$ und $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ für $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \le t\}.$$

Klar: $P(\bigcup_{i=1}^\infty \{T_i \le 0\}) = 0$ und[13] $P(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n < \infty\}) = 0$. OBdA: die komplementären Eigenschaften gelten auf ganz Ω.

Im folgenden $I = [0, \infty[$.

Definition 10. $X = (X_t)_{t\in I}$ *Poisson-Prozeß* mit Intensität $\lambda > 0$ bzgl. Filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$, falls[14]

(i) X cadlag Prozeß mit Werten in $\mathbb{N}_0$,

(ii) X adaptiert an $\mathfrak{F}$,

(iii) $X_0 = 0$,

(iv) für $0 \le s < t$ ist $X_t - X_s$

  (a) unabhängig von $\mathfrak{F}_s$,

  (b) Poisson-verteilt[15] mit Parameter $\lambda(t - s)$.

Satz 1. $(N_t)_{t\in I}$ ist Poisson-Prozeß mit Intensität λ bzgl. $(\mathfrak{F}_t^N)_{t\in I}$.

Klar: es gilt (i)–(iii). Der Beweis von (iv) ergibt sich mit dem folgenden Lemma 2.

Lemma 1. Für $0 \le s < t$ gilt

$$P(\{S_{N_s+1} > t\} \mid \mathfrak{F}_s^N) = \exp(-\lambda(t - s)).$$

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{F}_s^N$ und $t > s$. Zu zeigen:

$$P(\{S_{N_s+1} > t\} \cap A) = \exp(-\lambda(t - s)) \cdot P(A).$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ existiert $B \in \sigma(\{T_1, \ldots, T_n\})$ mit

$$A \cap \{N_s = n\} = B \cap \{N_s = n\},$$

---

[12] Für $t \ge 0$: $P(\{T_i \le t\}) = 1 - \exp(-\lambda t)$; charakterisierende Eigenschaft (Gedächtnislosigkeit): $P(\{T_i \ge t\} \mid \{T_i \ge s\}) = P(\{T_i \ge t - s\})$ für $0 \le s < t$.

[13] Starkes Gesetz der großen Zahlen: $S_n/n \to 1/\lambda$ P-f.s.

[14] Im folgenden oft kurz $X = Y$ oder $X \ge Y$, falls diese Eigenschaften f.s. gelten. Ebenso identifizieren wir Abbildungen, die f.s. übereinstimmen.

[15] Für $k \in \mathbb{N}_0$: $P(\{X_t - X_s = k\}) = (\lambda(t - s))^k/k! \cdot \exp(-\lambda(t - s))$.

siehe Bemerkung 3. Klar: T_{n+1} und $(S_n, 1_B)$ unabhängig. Somit

$$\begin{aligned}
P(\{S_{n+1} > t\} \cap A \cap \{N_s = n\}) &= P(\{T_{n+1} + S_n > t\} \cap B \cap \{S_n \leq s\}) \\
&= \int_{t-s}^{\infty} P(\{S_n > t - u\} \cap B \cap \{S_n \leq s\}) \cdot \lambda \exp(-\lambda u)\, du \\
&= \exp(-\lambda(t-s)) \cdot \int_0^{\infty} P(\{S_n > s - u\} \cap B \cap \{S_n \leq s\}) \cdot \lambda \exp(-\lambda u)\, du \\
&= \exp(-\lambda(t-s)) \cdot P(\{S_{n+1} > s\} \cap \{S_n \leq s\} \cap B) \\
&= \exp(-\lambda(t-s)) \cdot P(A \cap \{N_s = n\}).
\end{aligned}$$

Jetzt Summation über $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Lemma 2. Für $0 \leq s < t$, $A \in \mathfrak{F}_s^N$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(A \cap \{N_t - N_s = k\}) = P(A) \cdot \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \exp(-\lambda(t-s)).$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Bezeichne mit φ_k die Dichte von

$$Y_k = \sum_{\ell=n+2}^{n+k+1} T_\ell.$$

Wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned}
z := P(A \cap \{N_t - N_s \leq k\} \cap \{N_s = n\}) &= P(B \cap \{S_{n+k+1} > t\} \cap \{N_s = n\}) \\
&= P(B \cap \{N_s = n\} \cap \{S_{n+1} + Y_k > t\}) \\
&= \int_0^{\infty} \underbrace{P(B \cap \{N_s = n\} \cap \{S_{n+1} + u > t\})}_{=:h(u)} \cdot \varphi_k(u)\, du.
\end{aligned}$$

Weiter

$$\int_{t-s}^{\infty} h(u) \cdot \varphi_k(u)\, du = P(B \cap \{N_s = n\}) \cdot P(\{Y_k \geq t - s\}),$$

und der Beweis von Lemma 1 zeigt

$$\int_0^{t-s} h(u) \cdot \varphi_k(u)\, du = \int_0^{t-s} P(B \cap \{N_s = n\}) \cdot \exp(-\lambda(t-u-s)) \cdot \varphi_k(u)\, du.$$

Verwende[16]

$$\varphi_k(u) = \frac{\lambda^k u^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \exp(-\lambda u)$$

und

$$P(\{Y_k > u\}) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda u)^j}{j!} \cdot \exp(-\lambda u)$$

zum Nachweis von

$$z = P(A \cap \{N_s = n\}) \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda(t-s))^j}{j!} \exp(-\lambda(t-s)).$$

Jetzt Summation über $n \in \mathbb{N}$ etc. $\square$

[16] Y_k ist Gamma-verteilt mit Parameter (λ, k).

Proposition 7. Die kanonische Filtration $(\mathfrak{F}_t^N)_{t\in I}$ ist rechtsseitig stetig.

Beweis. Wesentlich: die Pfade von N sind lokal rechtsseitig konstant. Siehe Protter (1990, p. 16) für allgemeines Ergebnis für Zählprozesse. $\square$

Obige Konstruktion des Poisson-Prozesses ist universell. Es gibt verteilungsfreie Charakterisierungen des Poisson-Prozesses. Siehe Gänssler, Stute (1977, Kap. VII.5).

Anwendungen des Poisson-Prozesses: z. Bsp. Warteschlangentheorie, Finanzmathematik. Ausblick: Punktprozesse in $\mathbb{R}^d$.