Anhang B

Mehrdimensionale Normalverteilungen

Für einen d-dimensionalen Zufallsvektor

$$X = (X_1, \ldots, X_d)^\top$$

mit quadratisch-integrierbaren Komponenten X_i definiert man seinen *Erwartungswert* durch

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

und seine *Kovarianzmatrix* durch

$$\operatorname{Cov}(X) = \begin{pmatrix} \operatorname{Cov}(X_1, X_1) & \ldots & \operatorname{Cov}(X_1, X_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_d, X_1) & \ldots & \operatorname{Cov}(X_d, X_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

mit

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = E((X_i - E(X_i)) \cdot (X_j - E(X_j))).$$

In Verallgemeinerung der Rechenregeln für den Erwartungswert und die Varianz einer reellwertigen Zufallsvariablen gilt dann

$$E(LX + b) = LE(X) + b$$

und

$$\operatorname{Cov}(LX + b) = L \operatorname{Cov}(X) L^\top$$

für jede Matrix $L \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^k$. Die letzte Gleichung liefert insbesondere für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d \times 1}$

$$0 \leq \sigma^2(v^\top X) = v^\top \operatorname{Cov}(X)\, v,$$

so daß jede Kovarianzmatrix symmetrisch und nicht-negativ definit ist.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$ mit der Lebesgue-Dichte

$$\rho(x) = (2\pi)^{-d/2} \exp(-(x_1^2 + \cdots + x_d^2)/2)$$

für $x \in \mathbb{R}^d$ heißt *d-dimensionale Standard-Normalverteilung*. Die Dichte ρ ist das d-fache Tensorprodukt der Dichte der eindimensionalen Standard-Normalverteilung. Ein d-dimensionaler Zufallsvektor X ist deshalb genau dann d-dimensional standard-normalverteilt, wenn er unabhängige, jeweils eindimensional standard-normalverteilte Komponenten besitzt. Insbesondere gilt in diesem Fall

$$E(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}^k$ heißt *k-dimensionale Normalverteilung*, falls Q sich durch eine affin-lineare Transformation aus einer d-dimensionalen Standard-Normalverteilung ergibt. Eine k-dimensionale Normalverteilung ist also die Verteilung eines k-dimensionalen Zufallsvektors Y von der Form

$$Y = LX + b \tag{1}$$

mit einem d-dimensional standard-normalverteilten Zufallsvektor X, einer Matrix $L \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^k$.

Ist Y von der Form (1), so gilt

$$E(Y) = b \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}(Y) = LL^\top,$$

und diese beiden Größen bestimmen die Verteilung Q von Y bereits eindeutig, siehe Irle (2001, p. 127 ff.) und Gänssler, Stute (1977, Abschnitt 1.19)

$$\Sigma = LL^\top \tag{2}$$

heißt Q dann die *k-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert b und Kovarianzmatrix Σ*.

Jede symmetrische nicht-negativ definite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ist diagonalisierbar mit nicht-negativen Eigenwerten und somit in der Form (2) darstellbar. Also treten genau die symmetrischen nicht-negativ definiten Matrizen als Kovarianzmatrizen von Normalverteilungen auf.