Anhang A

Funktionen von beschränkter Variation und das Lebesgue-Stieltjes-Integral

Literatur:

Floret (1981), Heuser (2001).

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a < b$ setzen wir

$$V_a^b(f) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{m} |f(t_k) - f(t_{k-1})| : m \in \mathbb{N},\ a = t_0 < \cdots < t_m = b\Big\}.$$

Definition 1. f von *beschränkter Variation (b.V.)*, falls

$$\forall\ a < b : \qquad V_a^b(f) < \infty.$$

Satz 1 (Jordanscher Zerlegungssatz)**.** Äquivalent sind

(i) f b.V. (und rechtsseitig stetig),

(ii) $\exists\ f_1, f_2$ monoton wachsend (und rechtsseitig stetig) mit $f = f_1 - f_2$.

Zu f b.V. und rechtsseitig stetig sowie f_1, f_2 wie oben erhält man ein signiertes Maß μ_f auf $\{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : A \text{ beschränkt}\}$ per

$$\mu_f(]u, v]) = (f_1(v) - f_1(u)) - (f_2(v) - f_2(u)), \qquad u < v.$$

Satz 2 (Rieszscher Darstellungssatz auf $\mathbb{R}$)**.** Durch

$$f \mapsto \mu_f$$

wird eine lineare Bijektion

$$\{f : f \text{ b.V. und rechtsseitig stetig},\ f(0) = 0\} \to \{\mu : \mu \text{ signiertes Maß auf } \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

definiert.

Integrale bzgl. signierter Maße werden als Differenz der Integrale bzgl. des Positiv- und des Negativteils des Maßes definiert. Betrachten wir ohne Einschränkung ein signiertes Maß μ_f mit $f = f_1 - f_2$ wie oben, so ist dessen Positiv- und Negativteil durch μ_{f_1} und μ_{f_2}, also durch die nicht-negativen Maße mit den Verteilungsfunktionen f_1 und f_2 gegeben.

Falls für eine meßbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger die Integrale bezüglich μ_{f_1} und μ_{f_2} existieren, bezeichnet man

$$\int_{\mathbb{R}} g\, df = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_f = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_{f_1} - \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_{f_2}$$

als *Lebesgue-Stieltjes Integral* von g bzgl. f. Im Spezialfall einer stetigen Funktion g mit kompaktem Träger liegt ein sogenanntes Riemann-Stieltjes-Integral vor, das sich als Grenzwert von Riemann-Stieltjes-Summen berechnen laßt.