TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
30.06.09

# 11. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

**1.** Sei $X$ die starke Lösung der Gleichung $dX_t = \mu \cdot X_t\, dt + \sigma\, dW_t$ mit Anfangsbedingung $X_0 = x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

**a)** Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(X_t)$ und die Kovarianzen $E((X_t - E(X_t)) \cdot (X_s - E(X_s)))$ für $s, t \in [0, \infty[$.

**b)** Berechnen Sie ebenso die Erwartungswerte und Kovarianzen für den durch

$$Y_t = \int_0^t X_s\, ds$$

definierten Prozeß. Untersuchen Sie diese Größen im Falle $-\sigma = \mu \to -\infty$ auf Konvergenz. Interpretation?

**2.** Sei $0 < T < 1$. Zeigen Sie, daß

$$X_t = (1-t) \cdot \int_0^t \frac{1}{1-s}\, dW_s, \qquad t \in [0, T],$$

die starke Lösung von

$$dX_t = \frac{-X_t}{1-t}\, dt + dW_t, \qquad X_0 = 0,$$

auf $[0, T]$ definiert. Zeigen Sie ferner, daß

$$\lim_{t \to 1} X_t = 0$$

fast sicher gilt.

**3.** Zeigen Sie, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten von $\mathbb{R}^d$-wertigen Markov-Prozessen den Chapman-Kolmogorov-Gleichungen genügen. Welche Eigenschaften des Raumes $\mathbb{R}^d$ gehen hier ein?

**4.** Komplettieren Sie den Beweis von Proposition 1 in Kapitel 4.