TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
23.06.09

10. Aufgabenblatt zur Vorlesung
„Stochastische Analysis"

1. Sei $M \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$ mit $\langle M \rangle_t = t$ für $t \geq 0$.

a) Für $a \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(t,x) = \exp(\imath\, a\, x + 1/2\, a^2\, t).$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ito-Formel, daß $(f(t, M_t))_{t \in I}$ ein Martingal ist.

Für integrierbare $\mathbb{C}$-wertige Zufallsvariable X: $E(X|\mathfrak{G}) = E(\Re X|\mathfrak{G}) + \imath \cdot E(\Im X|\mathfrak{G})$; X heißt Martingal, falls $\Re X$ und $\Im X$ Martingale sind.

b) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}$ und $0 \leq s < t$

$$E(\exp(\imath\, a\,(M_t - M_s))|\mathfrak{F}_s) = \exp(-1/2\, a^2\,(t-s)).$$

c) Zeigen Sie, daß M eine Brownsche Bewegung ist.

Hinweis: $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen U, V sind genau dann unabhängig, wenn $\varphi_{(U,V)}(a,b) = \varphi_U(a) \cdot \varphi_V(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

2. Beweisen oder widerlegen Sie: für $X \in \mathfrak{L}^*(W)$ ist $I^W(X)$ ein Markov-Prozeß.

3. Untersuchen Sie das Verhalten einer geometrischen Brownschen Bewegung für $t \to \infty$.

4. Mit den Bezeichnungen des Abschnittes III.3: Zeigen Sie die schwache Konvergenz von HP_n gegen HP_*.