TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
16.06.09

9. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

1. a) Für $X \in \mathfrak{P}^*$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$T_n = n \wedge \inf\{t \in I : \int_0^t X_u^2 \, \langle M \rangle_u \geq n\}.$$

Zeigen Sie, daß $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten ist, die fast sicher gegen ∞ konvergiert. Zeigen Sie ferner, daß $X^{(T_n)} \in \mathfrak{L}^*$ gilt.

b) Sei $M = W$ und

$$X_t = \exp(W_1^2) \cdot 1_{]1,\infty[}(t).$$

Zeigen Sie $X \in \mathfrak{P}^* \setminus \mathfrak{L}^*$ und berechnen Sie $I(X)$. Ist $I(X)$ ein Martingal?

2. Sei M ein stetiges Martingal mit $M_0 = 0$, dessen Pfade auf jedem kompakten Intervall von beschränkter Variation sind. Zeigen Sie, daß $M = 0$ gilt.

3. Berechnen Sie

$$\int_0^t u \cdot \cos(W_u) \, dW_u,$$

wobei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 bezeichnet.

4. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Berechnen Sie

$$\int_0^t g(u) \, dW_u,$$

wobei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 bezeichnet. Welche Verteilung besitzt dieses stochastische Integral?