TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
09.06.09

# 8. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

**1.** Sei $W$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung.

**a)** Zeigen Sie, daß $\max_{t\in[0,1]} |W_t|$ integrierbar ist.

**b)** Wie läßt sich $E\left(\max_{t\in[0,1]} |W_t|\right)$ näherungsweise mit Hilfe von unabhängigen $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ berechnen?

Mit den üblichen Bezeichnungen und unter den üblichen Voraussetzungen:

**2. a)** Für $A \in \mathfrak{B}(I)\otimes\mathfrak{A}$ und $M \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$ sei

$$\mu_M(A) = \int_\Omega \int_0^\infty 1_A(u,\omega)\, d\langle M\rangle_u(\omega)\, dP(\omega).$$

Zeigen Sie, daß $\mu_M$ wohldefiniert und ein Maß auf $\mathfrak{B}(I)\otimes\mathfrak{A}$ ist. Hinweis: Kern, Dynkin-System.

**b)** Sei $t \in I$. Im Falle $M = W$ zeige man die $\mu_M$-Integrierbarkeit von $(u,\omega) \mapsto 1_{[0,t]}(u)\cdot W_u(\omega)$ und berechne das Integral.

**3.** Betrachten Sie ein Martingal $M \in \mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$ und eine Menge $A = ]s,t] \times B \subset I \times \Omega$ mit $B \in \mathfrak{F}_s$. Zeigen Sie

$$\mu_M(A) = E(1_B \cdot (M_t - M_s)^2).$$

**4.** Sei $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$.

**a)** Zeigen Sie, daß ein quadratisch-integrierbares Martingal $X$ mit $X_0 = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|X - X^{(n)}\| = 0$$

existiert.

**b)** Zeigen Sie, daß $P$-fast alle Pfade von $X$ stetig sind. Hinweis: Submartingal-Ungleichung

$$P\left(\left\{\sup_{t\in[0,T]} \left(X_t - X_t^{(n)}\right)^2 \geq \varepsilon\right\}\right) \leq 1/\varepsilon \cdot E\left(X_T - X_T^{(n)}\right)^2,$$

siehe Karatzas, Shreve (1999, Thm. 1.3.8) und vergleiche Satz II.7.

**c)** Folgern Sie, daß $\mathfrak{M}_2^{\mathrm{c}}$ vollständig ist.