TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
02.06.09

7. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

1. Zeigen Sie, daß ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ genau dann ein Markov-Prozeß bzgl. seiner kanonischen Filtration ist, wenn

$$P(\{X_t \in \Gamma\} \mid \sigma(\{X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\})) = P(\{X_t \in \Gamma\} \mid X_{s_n})$$

für alle $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s_1 < \ldots < s_n < t$ gilt.

2. Betrachten Sie das kanonische Modell $(C(I), \mathfrak{B}(C(I)), P_*)$, $(W_t)_{t\in I}$ der eindimensionalen Brownschen Bewegung sowie die Menge

$$A = \{f \in C(I) : \exists\ \epsilon > 0 : f \text{ konstant auf } [0, \epsilon]\}.$$

Es sei $\overline{\mathfrak{F}}_t$ die Vervollständigung von $\mathfrak{F}_t^W$ bezüglich P_*. Zeigen Sie

$$A \in \mathfrak{B}(C(I)), \quad P_*(A) = 0, \quad A \in \mathfrak{F}_{0+}^W, \quad A \notin \overline{\mathfrak{F}}_0.$$

3. Betrachten Sie eine Brownsche Familie $(B_t)_{t\in I}$, $(P^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ mit der universellen Filtration $(\widetilde{\mathfrak{F}}_t)_{t\in I}$. Zeigen Sie

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^d \ \ \forall A \in \widetilde{\mathfrak{F}}_0 : \quad P^x(A) \in \{0, 1\}.$$

4. Zeigen Sie, daß eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startwert 0 auf jedem Intervall $[0, \epsilon]$, $\epsilon > 0$, unendlich viele Vorzeichenwechsel besitzt.

Hinweis: Betrachte

$$H_{]0,\infty[} = \inf\{t \in I : B_t \in]0, \infty[\},$$

und benutze die Aufgaben 7.2 und 7.3 (oder studiere Abschnitt II.4 der Vorlesung).