TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
26.05.09

6. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

1. Sei $B = (B_t)_{t \in I}$ eine Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} E\left(V_t^{(2)}(B;\pi_n) - \langle B\rangle_t\right)^2 = 0$$

für jede Folge von Zerlegungen π_n des Intervalls $[0,t]$ mit $\lim_{n\to\infty} \|\pi_n\| = 0$.

b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Zeigen Sie

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} P(\{|X_n| > \varepsilon\}) < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} X_n = 0 \ P\text{-f.s.}$$

c) In der Situation a) gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_n\| < \infty.$$

Zeigen Sie

$$V_t^{(2)}(B;\pi_n) \to \langle B\rangle_t \qquad \text{f.s.}$$

2. Für $0 \le s < t$ und $x > 0$ gelte

$$k(s,x,t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(y/x))^2}{2(t-s)}\right)$$

falls $y > 0$ und $k(s,x,t,y) = 0$ andernfalls. Betrachten Sie die durch die Lebesgue-Dichten $k(s,x,t,\cdot)$ definierten Wahrscheinlichkeitsmaße $K(s,x,t,\cdot)$, und setzen Sie $K(s,x,t,\cdot) = \varepsilon_0$ für $x \le 0$.

a) Zeigen Sie, daß K die in Aufgabe 5.2 geforderten Eigenschaften besitzt.

b) Sei $X_t = \exp(B_t)$, wobei $(B_t)_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bezeichnet. Zeigen Sie

$$P(\{X_t \in B\} \mid X_s = \cdot) = K(s,\cdot,t,B)$$

für $0 \le s < t$ und $B \in \mathfrak{B}$.

c) Zeigen Sie, daß ein gemäß Aufgabe 5.2.a) konstruierter Prozeß keine unabhängigen Zuwächse besitzt.

3. Verifizieren Sie die Details aus Abschnitt II.3.1.

4. Konstruieren Sie einen Prozeß (mit endlicher Indexmenge), der ein Martingal aber kein Markov-Prozeß ist.