TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
19.05.09

5. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

1. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Borelschen σ-Algebra eines separablen metrischen Raumes M.

a) Zeigen Sie, daß genau eine abgeschlossene Menge $A \subset M$ mit folgenden Eigenschaften existiert: $P(A) = 1$ und

$$\forall\ B \subset M \text{ abgeschlossen} : P(B) = 1 \ \Rightarrow\ A \subset B.$$

b) Zeigen Sie, daß obige Menge A die Menge aller Punkte aus M ist, für die alle offenen Umgebungen positives Maß haben.

2. Für $0 \leq s < t$ sei $K(s, \cdot, t, \cdot)$ ein Markov-Kern von $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ nach $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Ferner gelte für $0 \leq r < s < t$, $x \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathfrak{B}$

$$K(r, x, t, B) = \int_{\mathbb{R}} K(s, y, t, B)\, K(r, x, s, dy).$$

a) Zeigen Sie, daß für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ existiert, der

$$\begin{aligned} &P(\{X_{t_0} \leq x_0 \wedge \ldots X_{t_n} \leq x_n\}) \\ &\quad = \int_{]-\infty, x_0]} \int_{]-\infty, x_1]} \cdots \int_{]-\infty, x_{n-1}]} \\ &\qquad K(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n,]-\infty, x_n])\, K(t_{n-2}, y_{n-2}, t_{n-1}, dy_{n-1}) \ldots K(t_0, y_0, t_1, dy_1)\, \mu(dy_0) \end{aligned}$$

für $0 = t_0 < \ldots < t_n$ und $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ erfüllt.

b) Zeigen Sie für jeden Wahrscheinlichkeitsraum und jeden Prozeß gemäß a)

$$P(\{X_t \in B\} \mid X_s = \cdot) = K(s, \cdot, t, B)$$

für $0 \leq s < t$ und $B \in \mathfrak{B}$.

c) Wie lassen sich mit dem Ergebnis aus a) Prozesse mit unabängigen stationären Inkrementen konstruieren? Vergleichen Sie a) und b) mit dem Satz von Ionescu-Tulcea.