TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
05.05.09

4. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis"

1. Sei $(A_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ stetig und wachsend, und sei $(M_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein beschränktes, rechtsseitig stetiges Martingal. Zeigen Sie

$$E\left(\int_{]0,t]} M_s\, dA_s\right) = E(M_t A_t)$$

für alle $t \geq 0$.

2. Betrachten Sie ein stetiges, quadratisch-integrierbares Martingal $(X_t)_{t\in I}$ und eine Stoppzeit T unter den üblichen Voraussetzungen an die zugrunde liegende Filtration. Zeige Sie

$$P\left(\bigcap_{t\in I}\{X_{T\wedge t} = 0\}\right) = 1,$$

falls

$$\langle X\rangle_T = 0 \quad P-\text{f.s.}$$

3. Beweisen Sie Satz II.12.

4. Betrachten Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(M, \mathfrak{B}(M), \nu)$, wobei M ein metrischer Raum und $\mathfrak{B}(M)$ die zugehörige Borelsche σ-Algebra ist. Zeigen Sie, daß

$$\nu(A) = \inf\{\nu(B) : B \supset A,\ B \text{ offen}\} = \sup\{\nu(B) : B \subset A,\ B \text{ abgeschlossen}\}$$

für jede Menge $A \in \mathfrak{B}(M)$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, daß das System aller Mengen mit obiger Eigenschaft eine σ-Algebra ist, die alle abgeschlossenen Mengen enthält.