TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
28.04.09

3. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

1. Für $X \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ zeige man:

a) Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall\ A \in \mathfrak{A} : P(A) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A |X|\, dP \leq \varepsilon.$$

b) Die Menge

$$\{E(X \mid \mathfrak{B}) : \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}$$

ist gleichgradig integrierbar.

2. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ ein Martingal mit rechtsseitig stetigen Pfaden und sei T eine Stoppzeit. Zeigen Sie, daß der gestoppte Prozeß $(X_{T \wedge t}, \mathfrak{F}_t)_{t \in I}$ wieder ein Martingal ist.

3. Sei $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein Submartingal mit

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0} E(|X_t|) < \infty.$$

Zeigen Sie, daß die Folge $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ fast sicher gegen eine integrierbare Zufallsvariable konvergiert.

4. Zeigen Sie: Jedes quadratisch integrierbare Martingal besitzt unkorrelierte Inkremente über nicht-überlappenden Teilintervallen.