TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
21.04.09

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

1. Betrachten Sie zwei Stoppzeiten S und T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$.

a) Zeigen Sie

$$\mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_T,$$

falls $S(\omega) \le T(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

b) Zeigen Sie, daß $S \wedge T = \min\{S, T\}$ eine Stoppzeit ist und

$$\mathfrak{F}_{S\wedge T} = \mathfrak{F}_S \cap \mathfrak{F}_T$$

gilt.

2. a) In welchem Sinne stimmen zwei Poisson-Prozesse gleicher Intensität überein?

b) Sei $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$ ein Poisson-Prozeß mit Intensität $\lambda > 0$. Zeigen Sie, daß fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \lambda$$

gilt.

3. Betrachten Sie einen Poisson-Prozeß $(X_t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ mit Intensität $\lambda > 0$.

a) Zeigen Sie ohne explizite Bestimmung von $E(X_t^2 \mid \mathfrak{F}_s)$ für $s < t$, daß $(X_t^2, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein Submartingal ist.

b) Sei $(M_t)_{t\in I}$ der zugehörige kompensierte Poisson-Prozeß. Zeigen Sie, daß $(M_t^2 - \lambda t, \mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ ein Martingal ist.

c) Berechnen Sie $E(X_t^2 \mid \mathfrak{F}_s)$ für $s < t$.

4. Sei S eine nicht-negative Zufallsvariable mit Verteilung P. Für eine Konstante $t > 0$ sei

$$M = \min(S, t).$$

a) Bestimmen Sie die von M erzeugte σ-Algebra.

b) Berechnen Sie $E(S \mid M)$ unter der Annahme, daß S exponential-verteilt zum Parameter 1 ist.