TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Klaus Ritter

SS 2009
16.04.09

1. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Stochastische Analysis“

1. Zeigen Sie für Prozesse X und Y mit f.s. rechtsseitig stetigen Pfaden

$$Y \text{ Modifikation von } X \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ und } Y \text{ ununterscheidbar.}$$

2. Konstruieren Sie Prozesse X und Y, so daß

a) Y eine Modifikation von X ist und X und Y nicht ununterscheidbar sind.

b) X und Y dieselben endlich-dimensionalen Randverteilungen besitzen und Y keine Modifikation von X ist.

3. Beweisen oder widerlegen Sie: Die kanonische Filtration eines Prozesses mit (rechtsseitig) stetigen Pfaden ist rechtsseitig stetig.

4. Der Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ sei zu einer gegebenen Filtration adaptiert. Für $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ sei

$$H_\Gamma(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in \Gamma\},$$

wobei $\inf \emptyset = \infty$.

a) Ist H_Γ eine Stoppzeit, falls Γ offen ist und X rechtsseitig stetige Pfade besitzt?

b) Sei Γ abgeschlossen und X ein Prozeß mit stetigen Pfaden. Zeigen Sie, daß H_Γ eine Stoppzeit ist.

Umseitig drei Aufgaben zum Thema „bedingte Erwartung“ (siehe Blatt 13 zur Vorlesung „Probability Theory“ im WS 2008/09).

A) Betrachten Sie $(\Omega, \mathfrak{A}, P) = ([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Für $\omega \in [0,1]$ sei

$$X(\omega) = 2\omega^2, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \text{falls } \omega < 1/2, \\ 2\omega - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $E(X \mid Y)$ und $E(X \mid Y = y)$ für $y \in [0,1]$.

B) **a)** Betrachten Sie unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen X und Y auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit $E(|X|) < \infty$. Bestimmen Sie $E(X \mid X + Y)$.

b) Betrachten Sie eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von iid. Zufallsvariablen. Bestimmen Sie

$$E(X_1 \mid \sigma(\{S_n, S_{n+1}, \ldots\})),$$

wobei $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

C) Sei (X, Y) normalverteilt mit Lebesgue-Dichte

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\det \Sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (z-m)' \, \Sigma^{-1} \, (z-m)\right),$$

wobei $\sigma_X, \ \sigma_Y > 0$ und

$$m = \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ positiv definit.}$$

Setze

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

a) Zeigen Sie

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot h(z)\right)$$

mit

$$h(z) = \frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho \cdot \frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

für $z = (x,y)'$.

b) Berechnen Sie die Dichte f_Y der Verteilung von Y. Interpretieren Sie die Parameter m_X, m_Y, σ_X^2 und σ_Y^2.

c) Zeigen Sie, daß ρ der Korrelationskoeffizient von X und Y ist.

d) Berechnen Sie $E(X \mid Y = y)$.

Hinweis: Einige Rechnungungen gestalten sich einfacher, wenn man zunächst den Fall $m = 0$ und $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ behandelt.