Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 23-04-2009

Optimierung in dynamischer Umgebung

2. Übung

Anmerkung: Wenn im folgenden von einem Graphen G gesprochen wird, und nicht explizit dieser Graph als gerichteter Graph bezeichnet wird, ist ein ungerichteter Graph gemeint.

1 Präsenzübungen

Aufgabe 1

Sei *CLIQUE* folgendes Problem:

Eingabe: Ein Graph G, und eine natürliche Zahl k.
Ausgabe: 'ja', falls G eine CLIQUE der Größe k enthält.Sonst 'nein'.

Sei *INDEPENDENT SET (IS)* folgendes Problem:

Eingabe: Ein Graph G, und eine natürliche Zahl k.
Ausgabe: 'ja', falls G eine unabhängige Menge von k Knoten enthält, die paarweise nicht miteinander verbunden sind. Sonst 'nein'.

Zeigen Sie $CLIQUE \leq_p IS$.

Aufgabe 2

Sei *LONGEST PATH* folgendes Problem:

Eingabe: Ein Graph G, zwei Knoten u und v von G und eine natürliche Zahl k.
Ausgabe: 'ja', falls ein Pfad ohne Knotenwiederholung von u nach v über k Kanten existiert. Sonst 'nein'.

Sei das Hamiltonkreisproblem (HC) das folgende:
Eingabe: Graph G.
Ausgabe: 'ja', falls ein Hamiltonscher Kreis im ungerichteten Graphen G enthalten ist. Sonst 'nein'. Ein Hamiltonscher Kreis ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal enthält.

Zeigen Sie $HC \leq_p$ *LONGEST PATH*.

Aufgabe 3

Sei *HALBE CLIQUE* folgendes Problem:

Eingabe: Ein Graph G. $|V|$ bezeichne die Anzahl der Knoten von G.
Ausgabe: 'ja', falls G eine Clique der Größe $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ enthält. Sonst 'nein'

Zeigen Sie, dass *HALBE CLIQUE* NP-vollständig ist.

2 Hausübungen

Aufgabe 4

Führen Sie die Reduktion HC $\leq_p$ TSP durch, wobei:

Problem TSP:
Eingabe: ein ungerichteter, vollständiger Graph G, w eine Kantengewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{N}$, k eine natürliche Zahl.
Ausgabe: 'ja', falls in G eine Rundreise existiert, die jeden Knoten genau einmal besucht und zwar so, dass die Summe der Kantengewichte $\leq k$ ist. Sonst 'nein'.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass das Halteproblem NP-schwer, aber nicht NP-vollständig ist.

Aufgabe 6

Beim NP-vollständigen Entscheidungsproblem SAT ist eine boolesche Formel ϕ in KNF gegeben. Zu entscheiden ist, ob ϕ erfüllbar ist. Beim Entscheidungsproblem *Integer Programming* sind m Ungleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq d_j, a_{ij} \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, m$$

gegeben. Zu entscheiden ist, ob eine Belegung der Variablen x_i mit Werten aus $\mathbb{Z}$ existiert, die alle Ungleichungen erfüllt.

Zeigen Sie: SAT $\leq_p$ Integer Programming.

Aufgabe 7

Problem SUBSET SUM (Erzielung einer vorgeschriebenen Teilsumme):
Eingabe: n Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ und eine 'Teilsummenzahl' $S \in \mathbb{N}$.
Ausgabe: 'ja', falls es eine Menge $I \subset \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $\sum_{i \in I} a_i = S$. Sonst 'nein'.

Problem PARTITION (Zerlegung in zwei gleichgroße Teilsummen):
Eingabe: n Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$.
Ausgabe: 'ja', falls es eine Menge $I \subset \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \notin I} a_j$. Sonst 'nein'.

Zeigen Sie SUBSET SUM $\leq_p$ PARTITION.