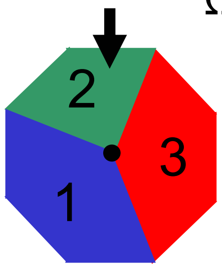
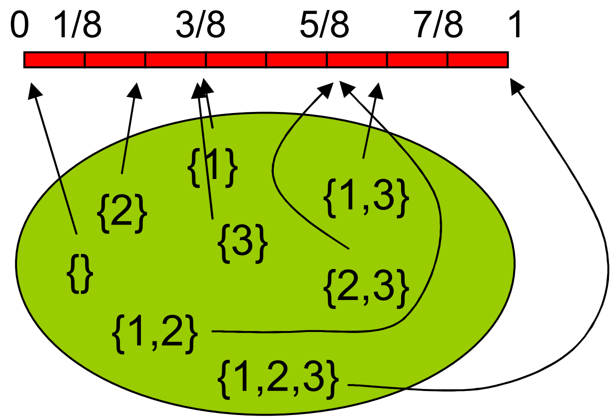
Stochastische Problemstellungen

Voraussetzungen

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Tripel (Ω,Σ,P). Ω bezeichnet die Menge aller Elementarereignissee, Σ eine Sigma-Algebra und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Σ. Aus P ergeben sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Ereignisse aus Σ.



$\Omega = \{1, 2, 3\}$



Beispiel: Ein Glücksrad mit Ergebnismenge Ω, Ereignisraum Σ (hier die Potenzmenge von Ω) und Wahrscheinlichkeitsmaß P.

Stochastische Problemstellungen

Im folgenden sind alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskret und endlich, also sehr einfach. Kombinierte Gesamtverteilungen sind zum Teil nur implizit gegeben.

Es sollen folgende Problemstellungen betrachtet werden:

- Stochastic Satisfibility (SSAT)
- Dynamic Graph Reliability (DGR)
- Optimal Control mit Dynamic Programming
- Multi-Stage Stochastic Programming

SSAT [Papadimitriou 1985]

Problem SSAT: Gegeben sei eine boolsche Formel C in CNF, mit den Variablen $x_1,\ldots,x_n$ (n gerade) und eine rationale Zahl $b \in [0,1]$.

Ist die Wahrscheinlichkeit für

$\exists x_1 \, \mathfrak{R} x_2 \, \exists x_3 \ldots \mathfrak{R} x_n : C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{TRUE}$

größer oder gleich 1/2?

$\mathfrak{R}$ ist ein stochastischer Quantor, der so quantifizierte Variablen mit Wahrscheinlichkeit ½ TRUE bzw. FALSE setzt.

Satz: SSAT ist PSPACE complete

SSAT

Beweis: Wir nehmen eine QSAT-Instanz, interpretieren deren Allquantifizierte Variablen als Random-Variablen, die mit Wahrscheoinlichkeit ½ auf true oder false gesetzt werden und fügen eine Variable x_0 und eine Klausel (x_0) hinzu:

Ist die Wahrscheinlichkeit für

$\Re\, x_0 \exists\, x_1 \Re\, x_2 \exists\, x_3 \ldots \Re\, x_n : (x_0) \wedge C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{TRUE}$

größer oder gleich 1/2?

Mit Wahrscheinlichkeit ½ ist die CNF wegen x_0 false. Wenn also die SSAT-Antwort auf unsere Konstruktion “ja” ist, kann das nur daran liegen, dass es eine Gewinnstrategie für den Existenzspieler im ursprünglichen QSAT Problem gibt.

Dynamic Graph Reliability (DGR)

Problem DGR: Gegeben sei ein gerichteter Graph ohne Kreise, also ein DAG (Directed Acyclic Graph), G = (V,E). Zwei seiner Knoten s (source) und t (sink) seien speziell ausgezeichnet.

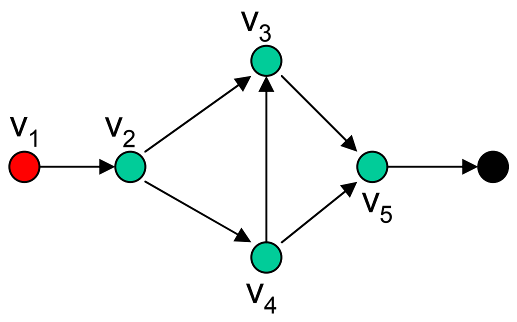
Frage: Wie ist die Startegie, die die Wahrscheinlichkeit das Ziel t zu erreichen maximiert, wenn

- man bei Knoten s startet

- p(e,v) die Wahrscheinlichkeit angibt, dass Kante e ausfällt, wenn wir Knoten v betreten, und der Graph somit während unserer Wanderung abhängig von unseren Entscheidungen und vom Zufall zerfällt?

Dynamic Graph Reliability (DGR)

Beispiel A:

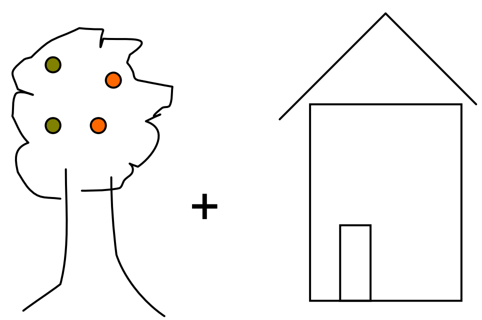


$p((v_3, v_5), v_3) = 0.5$ → 0.5
$p((v_4, v_5), v_3) = 0.9$ → 0.1
$p((v_3, v_5), v_4) = 0.5$ → 0.5
$p((v_4, v_5), v_4) = 0.6$ → 0.4

W., dass man ans Ziel kommt, wenn man über v_4 geht:

$0.4 + 0.5 * 0.5 = 0.65$

Beispiel B:



Frage: Baum fällen? Dann kann er nicht mehr umfallen. Bringt aber später auch keine Ernte.

-> Entscheidung beeinflusst Wahrscheinlichkeiten, deren Auswirkungen erst spät spürbar werden.

Dynamic Graph Reliability (DGR)

Hilfsproblem SSAT': Gegeben ist eine boolsche 3-SAT Formel mit

alternierendem $\exists$ - $\Re$' - Quantor-Präfix, sowie eine rationale Zahl $b \in [0,1]$.

In dieser Verion:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Belegungen true oder false für eine Randomvariable *unverfügbar* wird ist ½.
- Eine Existenzstrategie wählt eine Belegung für die Existenzvariable x_1, und dann wird bestimmt, welche Belegungen für x_2 verfügbar sind. Mit Wahrscheinlichkeit ¼ ist keine verfügbar, mit Wahrscheinlichkeit ¼ sind beide verfügbar, mit Wahrscheinlichkeit ¼ ist nur true verfügbar und mit Wahrscheinlichkeit ¼ nur false.
- Dann wählt die Strategie eine der verfügbaren Belegungen für x_2 etc. Wenn an einer $\Re$'-quantifizierten Variable keine Belegung verfügbar ist, hat der Existenzspieler sein Spiel verloren.

Dynamic Graph Reliability (DGR)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Hilfsproblem SSAT':

- **Die Frage:**

  Ist die Wahrscheinlichkeit für

  $$\exists\, x_1\ \mathfrak{R}'\, x_2\ \exists\, x_3 \ldots \mathfrak{R}'\, x_n : C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{TRUE}$$

  größer oder gleich b?

  ist PSPACE-vollständig.

Härte: Wir nehmen eine QSAT Formel und interpretieren die n vielen Allquantoren als $\mathfrak{R}'$-Quantoren; b setzen wir auf $(3/4)^n$. Mit Wahrscheinlichkeit $(1 - 3/4)^n$ geht ein Spiel für den Existenzspieler dadurch verloren, dass die SAT-Formel C "nicht erreicht" wird. Falls es nun eine Gewinnstrategie für den Existenzspieler gibt, die immer gewinnt, ist die Wahrscheinlichkeit, das C erfüllt wird gerade gleich $(3/4)^n$. Sonst ist sie kleiner.

Dynamic Graph Reliability (DGR)

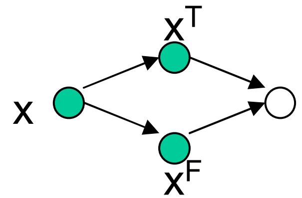
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

DGR ist PSPACE-schwer

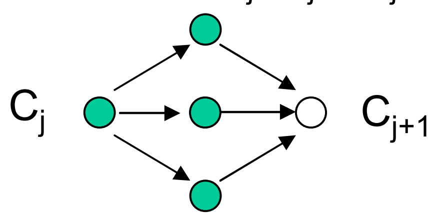
Beweis:

Sei (X,C,b) eine SSAT' Instanz mit $X=\{x_1,..,x_n\}$ der Variablenmenge, den Klauseln $C=\{C_1,..,C_m\}$ und der Schranke b.

- Für jede Variable x habe G 3 Knoten: x, x^T, x^F und die Kanten (x, x^T), (x, x^F)



- von x^T und x^F führen Kanten zum nächsten Variablenknoten.
- Für jede Klausel C_j haben wir 4 Knoten C_j, C_j^1, C_j^2, C_j^3. C_j^1, C_j^2, C_j^3 sind jeweils mit C_j und C_{j+1} verbunden.



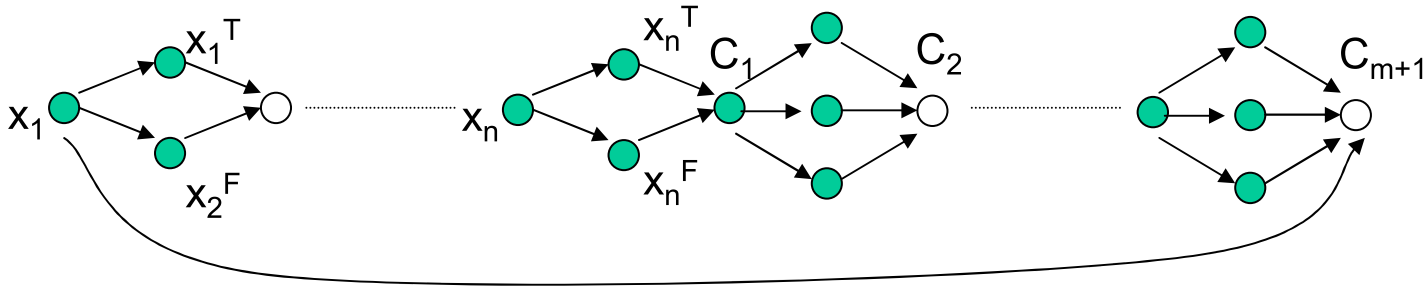
Dynamic Graph Reliability (DGR)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

DGR ist PSPACE-schwer

Beweis Forts:

- Zusätzlich gibt es Kanten von x_n^T und x_n^F nach C_1 und eine Kante von x_1 nach C_{m+1}.



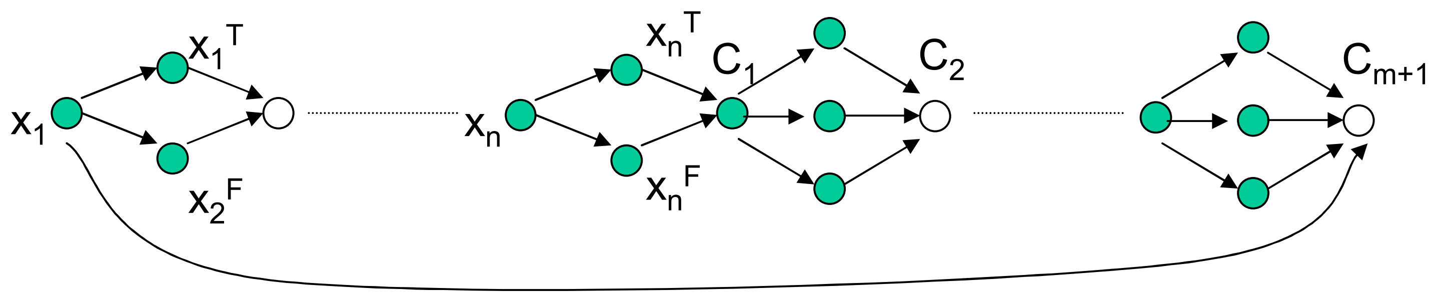
Definiere nun die Wahrscheinlichkeiten p(e,v):

- für jede stochastische Variable setzen wir $p((x,x^T),x) = p((x,x^F),x) = 0.5$.
- für alle Variablen x setzen wir: Wenn $e=(C_j,C_j^{i\in\{1,2,3\}})$ eine Kante ist, die zum Literal x im Klauselpart gehört: $p(e,x^F) = 1$. Wenn $e=(C_j,C_j^{i\in\{1,2,3\}})$ eine Kante ist, die zum Literal *not* x im Klauselpart gehört: $p(e,x^T) = 1$.
- $p((x_1,C_{m+1}),x_1) := 0.5 + b - 2^{-3n}$
- $p(e,v) = 0$ für alle anderen Paare (e,v).

Dynamic Graph Reliability (DGR)

DGR ist PSPACE-schwer

Beweis Forts:



Beste Strategie:
Wenn (x_1,C_{m+1}) existiert gehen wir dort entlang. Wir erreichen also das Ziel mit Wahrscheinlichkeit 1- $p((x_1,C_{m+1}),x_1)$ plus der Wahrscheinlichkeit, dass die Formel C erfüllt wird. Die Gesamtwahrscheinlichkeit, das Ziel zu erreichen ist über 0.5, g.d.w. die Wahrscheinlichkeit, dass die Formel erfüllbar wird, größer oder gleich b ist.