Plan

Folgende Themen sollen die nächsten Vorlesungsstunden füllen:

- Quantifizierte Linear Programme mit Existenz- und Allquantoren
- Dynamische Programmierung und Optimale Kontrolle
- Stochastische Programmierung
- Komplexität verschiedener stochastischer Problemstellungen
- Quantifizierte Lineare Programme mit Random-Quantoren und das Dynamische Graph-Reliability Problem
- PSPACE-vollständige Einpersonenspiele: ganz anders und doch wieder nicht

QLPs und QIPs

Problemstellung QLP:

$$G : \exists x_1 \in [a_1, b_1]\ \forall y_1 \in [l_1, u_1]\ \exists x_2 \in [a_2, b_2] \ldots \exists x_n \in [a_n, b_n]\ \forall y_n \in [l_n, u_n]$$

$$A' \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{durch Umordnung}} \leq b, x \geq 0$$

„Entscheide, ob es ein x_1 gibt, so dass für alle y_1 es ein x_2 gibt u.s.w., so dass dass gegebene Ungleichungssystem eine gültige Lösung hat.“

Dabei: A $\in \mathbb{Z}^{m \times 2n}$, x,y $\in \mathbb{Q}^n$, b $\in \mathbb{Z}^m$
(Vorsicht: nicht A, a_1,..,a_n,b_1,...,b_n, b) durcheinanderbringen. Bedeutung ist aus Zusammenhang entnehmbar.

QLPs und QIPs

Problemstellung QLP:

- Das Paar (A,b) wird als Nebenbedingungssystem bezeichnet

- o.B.d.A sollen die Quantifizierer sich strikt abwechseln. Andernfalls könnte man zusätzliche Dummyvariablen einführen, die in (A,b) nicht vorkommen.

- Die Zeichenkette

$$\exists x_1 \in [a_1, b_1]\ \forall y_1 \in [l_1, u_1]\ \forall x_2 \in [a_2, b_2] \ldots \exists x_n \in [l_n, u_n]\ \forall y_n \in [a_n, b_n]$$

wird Quantifizierer-String Q(x,y) genannt. Die Länge von Q(x,y) wird mit |Q(A,b)| bezeichnet.

- Bedingungen an die ∃–Variablen können in die Matrix A kodiert werden, Bedingungen an die ∀–Variablen nicht.

QLPs und QIPs

Problemstellung QLP, Beispiel:

$$\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}, y_1 \in [3,5], y_2 \in [7,10]$$

$$\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 : \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + y_1 \leq -2 \\ -x_1 + x_2 - y_1 \leq 5 \\ x_2 + y_2 \leq 15 \end{pmatrix}$$

QLPs und QIPs

QLP als Spiel:

- Wir können ein QLP als Spiel zwischen einem Spieler X, der die Existenz-variablen setzt und einem Spieler Y, der die All-Variablen setzt, auffassen.

- Die Züge werde alternierend ausgeführt.

- Ein *Spiel* (x,y) ist eine Abfolge von Zügen
  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$
  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$

- Eine *Strategie* für X bezeichnen wir mit $\underline{x}$ und eine Strategie für Y mit $\underline{y}$.
  $\underline{x} = [x_1, \quad x_2(x_1,y_1), \dots \quad , x_n(x_1,y_1,x_2 \dots y_{n-1})]$
  $\underline{y} = [y_1(x_1), y_2(x_1,y_1,x_2), \dots, y_n(x_1,y_1,x_2 \dots y_{n-1},x_n)]$
  Es gibt für jedes QLP entweder eine Gewinnstrategie für X oder eine für Y. (XOR)

Diese Art der Strategie wird meist, z.B. im Gebiet der Kontrolltheorie als *Politik* bezeichnet. Strategien sind streng genommen Politiken, die Bäume sind.

QLPs und QIPs

Lösungsalgorithmus, QLP-Decide(A,b)

```
A_{n+1} = A; b_{n+1} = b;
for (i = n down to 2) do
        (A_i,b_i) = Elim-Univ-Variable(A_{i+1},b_{i+1},y_i,l_i,u_i);
        (A_i,b_i) = Elim-Exist-Variable(A_i,b_i,x_i);
        if (not Check-consistency()) then System is infeasable
        Prune-Constraints()
 (A_1,b_1) = Elim-Univ-Variable(A_2,b_2,y_1,l_1,u_1);
// The System is now reduced to a one-variable-system, that
//  can easily be checked on consistency. Let the system have
// the form x_1 ≤ v and x_1 ≥ w
if (w ≤ x_1 ≤ v and w ≤ v) then return System is feasible
else return System is infeasible
```

QLPs und QIPs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Elim-Univ-Variable(A,b,y^n,l^n,u^n)
// beachte: Variablenindizierung hier oben statt unten

1: // Elimination der innersten Variable y_n (All-Variable).
2: for all constraints from i = 1 to m do
3: // assume the worst case for the ∃-Player
4: if ($a_{i,2n} l^n \leq a_{i,2n} u^n$) $y_i^n = u^n$
5: else $y_i^n = l^n$
6: build the new A and b by incorporating all constants to into b

Beispiel: $y_1 \in [-1/3, 1]$

(A,b) =

$3x_1 + 4y_1 \leq 5 \quad \rightarrow y_1 = 1$

$4x_1 - 3y_1 \leq 1 \quad \rightarrow y_1 = -1/3$

Damit sieht das neue System wie folgt aus:

$3x_1 + 4 \leq 5 \qquad \Rightarrow \qquad 3x_1 \leq 1$

$4x_1 + 1 \leq 1 \qquad\qquad\qquad 4x_1 \leq 0$

QLPs und QIPs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Korrektheit

Seien

$$L: \exists x_1 \in [a_1,b_1]\, \forall y_1 \in [l_1,u_1]\, \exists x_2 \in [a_2,b_2] \ldots \exists x_n \in [a_n,b_n]\, \forall y_n \in [l_n,u_n] \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} \le b, x \ge 0$$

und

$$R: \exists x_1 \in [a_1,b_1]\, \forall y_1 \in [l_1,u_1]\, \exists x_2 \in [a_2,b_2] \ldots \exists x_n \in [a_n,b_n] \quad A' \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \le b', x \ge 0$$

zwei Systeme, wobei R aus L durch
Elim-Univ-Variable(A,b,y_n,l_n,u_n) hervorgegangen sei.

QLPs und QIPs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Intuition

Sei $\underline{x}$ eine Gewinnstrategie für X, d.h., X kann in jedem Schritt x_i so wählen, dass egal wie Y spielt, X gewinnt und also insbesondere alle Nebenbedingungen eingehalten werden. Für alle Spiele, die der Strategie $\underline{x}$ folgen, muss also X seinen Zug x_n machen, bevor Y seinen letzten Zug y_n macht.
Wenn X dem Y eine Ungleichung zu zerstören ermöglicht, gewinnt Y.
Also muss X für jede einzelne Ungleichung sicherstellen, dass Y auch im schlimmsten Fall nicht gewinnt.

Korrektheit

L => R ist klar. X gibt Y keine Möglichkeit zu gewinnen.

R => L ist ebenso klar. Wenn es in R eine Gewinnstrategie für X gibt, ist diese durch unsere Konstruktion entstanden. Verfolgt man die Umformungen zurück, bekommt Y zwar mehr Freiheiten (eine zusätzliche) Aktion, die rechte Seite b wird aber so stark erweitert, dass die zusätzlichen Aktionen gerade nicht ermöglichen, eine Ungleichung in L zu zerstören.

QLPs und QIPs

Elim-Exist-Variable(A,b,x_i)

// entspricht Fourier-Motzkin-Elemination

1: Form the set $L_\leq$ of every constraint that can be written in the form $x_i \leq 0$. If $x_i \leq m_j$ is a constraint in (A,b), m_j is added to $L_\leq$.

2: Form the set $L_\geq$ of every constraint that can be written in the form $x_i \geq 0$. If $x_i \geq n_k$ is a constraint in (A,b), n_k is added to $L_\leq$.

3: Form the set $L_=$ of every constraint that does not contain x_i

4: $\mathscr{I} = \emptyset$

5: for each constraint $m_j \in L_\leq$ do

6:     for each constraint $n_k \in L_\geq$ do

7:         Create new constraint l_{kj} from $n_k \leq m_j$; $\mathscr{I} = \mathscr{I} \cup l_{kj}$

8: Form a new system (A‘,b‘) from the constarints in $\mathscr{I} = \mathscr{I} \cup L_=$

9: return (A‘,b‘)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

QLPs und QIPs

Korrektheit

Seien

$$L : \exists x_1 \ \forall y_1 \in [l_1, u_1] \ \exists x_2 \ldots \forall y_{n-1} \in [l_{n-1}, u_{n-1}] \ \exists x_n \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} \le b, x \ge 0$$

und

$$R : \exists x_1 \ \forall y_1 \in [l_1, u_1] \ \exists x_2 \ldots \exists x_{n-1} \ \forall \ y_{n-1} \in [l_{n-1}, u_{n-1}] \quad A' \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \le b', x \ge 0$$

zwei Systeme, wobei R aus L durch **Elim-Univ-Variable(A,b,x_n)** hervorgegangen sei.

QLPs und QIPs

Korrektheit

Seien

$\underline{x}_L = [x_1, x_2(x_1,y_1),\dots,x_n(x_1,y_1,x_2 \dots y_{n-1})]$ eine Strategie für L und
$\underline{x}_R = [x_1, x_2(x_1,y_1),\dots, x_{n-1}(x_1,y_1,x_2 \dots y_{n-2})]$ eine Strategie für R.
$\underline{x}_R$ entsteht aus $\underline{x}_L$ durch weglassen der letzten Komponente.

Annahme: $\underline{x}_L$ ist eine Gewinnstrategie für L, aber $\underline{x}_R$ ist keine Gewinnstrategie für R.

Dann gibt es eine Gewinnstrategie $\underline{y}_R(\underline{x}_R)$, $\underline{y}_R$ (möglicherweise) abhängig von $\underline{x}_R$. Betrachte nun das Spiel (x_R,y_R), welches entsteht, indem X und Y die Züge ihrer Strategien $\underline{y}_R(\underline{x}_R)$und $\underline{x}_R$ anwenden.

Da $\underline{y}_R(\underline{x}_R)$ eine Gewinnstrategie ist, gibt es eine Nebenbedingung in $A' \cdot (x_R,y_R) \leq b'$, die verletzt wird. Sei dies in der i-te Zeile und sei $p'_i := A'_{i*} \cdot (x_R,y_R) > b'_i$. Schreibe p'_i auch als $A'^x_{i*} \cdot x_R + A'^y_{i*} \cdot y_R \leq b'$, wobei A'^x_{i*} und A'^y_i entsprechende Teil matrizen von A' sind.

QLPs und QIPs

Korrektheit

1. Fall: p'_i gibt es auch als p_i in L. Dann kommt Variable x_n offenbar in p_i nicht vor. D.h., die gleiche Partie wird von X auch in L verloren.
2. Fall: p'_i wurde in L zusammengesetzt aus $l_i : m_i \leq x_n$ und $l_j : x_n \leq n_j$, um mit *Elim-Exist-Variable* $m_i \leq n_j$ zu erhalten. Wir schreiben
   l_i als $(A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R - b_i) / A_{i,n} \leq x_n$ und
   l_j als $x_n \leq (b_j - A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R) / A_{i,n}$.
   Da $\underline{y}_R(\underline{x}_R)$ eine Gewinnstrategie in R ist, wissen wir aber, dass
   $$(A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R - b_i) / A_{i,n} > (b_j - A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R) / A_{i,n}$$
   D.h., es kann kein x_n geben, welches zwischen den beiden Termen liegt.
   $y_R(\underline{x}_R)$ wäre also auch für L eine Gewinnstrategie für Spieler Y.

Es gilt also L => R. Wir müssen noch die Rückrichtung zeigen.

QLPs und QIPs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Korrektheit

Seien $S_1 = \{m_1 \leq x_n, m_2 \leq x_n, \ldots, m_p \leq x_n\}$ und $S_2 = \{x_n \leq n_1, x_n \leq n_2, \ldots, x_n \leq n_q\}$ die Nebenbedingungen in L, die als $x_n \geq ()$ bzw. als $x_n \leq ()$ geschrieben werden können. $\underline{x}_R$ sei eine Gewinnstrategie für Spieler X in R.

Betrachte nun x_n mit: $\max^p_{i=1} m_i \leq x_n \leq \min^q_{j=1} n_j$. Die Behauptung ist, dass $\underline{x}_L = [\underline{x}_R, x_n(x_L, x_R)]$ eine Gewinnstrategie für L ist.

Annahme: Das Gegenteil ist der Fall, $\underline{x}_L$ ist also keine Gewinnstrategie für L.

Dann gibt es eine Gewinnstrategie $\underline{y}_L(\underline{x}_L)$ für Y. Seien y_L und x_L wieder die Züge des entstehenden Spiels. $\underline{x}_R$, $\underline{y}_R$, x_R und y_R analog.

Da $\underline{y}_L(\underline{x}_L)$ eine Gewinnstrategie von Y in L ist, gibt es eine Nebenbedingung p_i, die im System $A \cdot (x_L, y_L) \leq b$ verletzt wird.

QLPs und QIPs

Korrektheit

1. Fall: p_i taucht in gleicher Form is R auf. Offenbar war x_n dann nicht Teil von p_i. Somit gewinnt Y mit $\underline{y}_R(x_R)$ auch in R.
2. p_i sei von der Form $l_i : m_i \leq x_n \in S_1$. Betrachte nun eine beliebiges Element $l_j : n_j \leq x_n \in S_2$. Dann ist $m_i \leq n_j$ Teil von R.

   Wir schreiben l_i als $(A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R - b_i) / A_{i,n} \leq x_n$ und l_j als $x_n \leq (b_j - A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R) / A_{i,n}$. Weil $\underline{x}_R$ eine Strategie für R ist, wissen wir, dass

   $$(A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R - b_i) / A_{i,n} \leq (b_j - A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R) / A_{i,n}.$$

   Da aber $y_L(x_L)$ eine Gewinnstrategie für Y in L ist, gilt auch:

   $(A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R - b_i) / A_{i,n} > x_n$, für alle $x_n \in \mathbb{Q}$.

   D.h., X konnte kein $x_n \in \mathbb{Q}$ finden, so dass

   $(A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R - b_i) / A_{i,n} \leq x_n$ und

   $x_n \leq (b_j - A^x_{i,\{1,\dots,2n-2\}} \cdot x_R - A^y_{i,\{1,\dots,2n-1\}} \cdot y_R) / A_{i,n}$.

   $\underline{y}_L(\underline{x}_L)$ kann also keine Gewinnstrategie für L sein, da anderenfalls $\underline{y}_R(\underline{x}_R)$ eine Gewinnstrategie von Y in R wäre. (analog für p_i von der Form $l_j : x_n \leq n_j \in S_2$.)

QLPs und QIPs

Satz:

Wir haben gezeigt:

1. Wenn die innerste Variable des Quantorblocks eine All-Variable ist, lässt sie sich in dem Sinn eleminieren, dass ein neues System entsteht, welches eine Variable weniger besitzt, und genau dann eine Gewinnstrategie für Spieler X enthält, wenn auch das alte System eine Gewinnstrategie für Spieler X enthält.
2. Wenn die innerste Varaible eine Existenzvariable ist, lässt sich die Fourier-Motzkin Elemination zur Elemination der innersten Variable anwenden.
3. Diese beiden Schritte lassen sich mehrfach anwenden.

Es folgt: Der Algorithmus QLP-Decide(A,b) entscheidet Problem G korrekt.

QLPs und QIPs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz:

Bezeichne $y_i \in \{l_i,u_i\}$, dass y_i aus der Menge der Zahlen $[l_i,u_i] \cap \mathbb{Z}$ stammen soll.
Dann gilt, sofern alle Existenzvariablen kontinuierlich sind:

$$L : \exists x_1 \; \forall y_1 \in [l_1,u_1] \, \exists x_2 \ldots \exists x_n \forall y_n \in [l_n,u_n] \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b, x \geq 0$$

$$R : \exists x_1 \; \forall y_1 \in \{l_1,u_1\} \, \exists x_2 \ldots \exists x_n \forall y_n \in \{l_n,u_n\} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b, x \geq 0$$

L $\Leftrightarrow$ R

Korrektheit: Für die Elemination des innersten Quantors, wenn All-Quantor, sind nur die beiden Grenzen l_i und u_i benutzt worden. Nach einer Fourier-Motzkin-Elemination der nächsten, dann existenzquantifizierten, Variable, ist wiederum eine All-Quantifizierte Variable die Innerste.

QLPs und QIPs

Komplexität:

QIPs der Form

$$G: \exists x_1 \in \{a_1, b_1\}\ \forall y_1 \in \{l_1, u_1\} \ldots \exists x_n \in \{a_n, b_n\} \forall y_n \in \{l_n, u_n\} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b, x \geq 0$$

sind PSPACE volständig.

a) PSPACE-schwer:
Ausgehend von einem QSAT-Problem bilde für jede Klausel
$k=(l_{k1} \vee \ldots \vee l_{kr})$ bilde eine Nebenbedingung der Form $L_{k1} + \ldots + L_{kr} \geq 1$, wobei hier
$L_{ki} = x_j$, falls $l_{ki} = x_j$ nicht-negiert und Existenzquantifiziert,
$L_{ki} = 1-x_j$, falls $l_{ki} = x_j$ negiert und Existenzquantifiziert,
$L_{ki} = y_j$, falls $l_{ki} = y_j$ nicht-negiert und Allquantifiziert,
$L_{ki} = 1-y_j$, falls $l_{ki} = y_j$ negiert und Allquantifiziert.
Offenbar ist die SAT-Formel genau dann erfüllt, wenn das Nebenbedingungs-system nicht verletzt wird. Dies setzt sich über die Quantoren fort.

b) in PSPACE: Nutze den Alphabeta-Algorithmus

QLPs und QIPs

Komplexität von QLPs ist unbekannt. Jedoch:

Ein E-QLP ist ein QLP, bei demerst die existenzquantifizierten Variablen kommen:

$$G : \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y_1 \in \{l_1, u_1\} \ldots \forall y_n \in \{l_n, u_n\} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b, x \geq 0$$

E-QLPs sind in P.

Beweis: Wir eleminieren zuerst alle Allvariablen. Übrig bleibt ein LP.

Damit ist auch klar: E-QIPs sind NP-vollständig.

QLPs und QIPs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Komplexität von QLPs ist unbekannt. Jedoch:

Ein F-QLP ist ein QLP, bei dem erst die allquantifizierten Variablen kommen:

$$G : \forall y_1 \in \{l_1, u_1\} \ldots \forall y_n \in \{l_n, u_n\} \exists x_1 \ldots \exists x_n \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b, x \geq 0$$

F-QLPs sind coNP-vollständig.

Beweis: Ein Problem P ist in coNP, wenn sein negiertes Problem in NP ist.
Wir bilden deshalb

$$\overline{G} : \exists y_1 \in \{l_1, u_1\} \ldots \exists y_n \in \{l_n, u_n\} : not \left(\exists x_1 \ldots \exists x_n \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b, x \geq 0 \right)$$

Algorithmus: Rate $y_1, \ldots, y_n$ und prüfe, of das Polyeder

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \quad A \cdot x \leq b, x \geq 0$$

leer ist.

QLPs und QIPs

Komplexität von QLPs ist unbekannt. Jedoch:

F-QLPs sind coNP-schwer.
Beweis: Nehme eine SAT-Formel und negiere sie:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \;\; (l_{1,1} \vee \dots \vee l_{1,k1}) \wedge (l_{2,1} \vee \dots \vee l_{2,k2}) \wedge \dots \wedge (l_{m,1} \vee \dots \vee l_{m,km})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$not\left(\forall y_1 \dots \forall y_n \;\; (\bar{l}_{1,1} \wedge \dots \wedge \bar{l}_{1,k1}) \vee (\bar{l}_{2,1} \wedge \dots \wedge \bar{l}_{2,k2}) \vee \dots \vee (\bar{l}_{m,1} \wedge \dots \wedge \bar{l}_{m,km})\right)$$

Hieraus bilden wir folgendes QIP G:

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \; \exists x_1 \dots \exists x_m :$$

$$\bar{l}_{1,j} \geq x_1, \forall j \in \{1,\dots,k_1\};\; wobei \;\; l_{1,j} = y_l \; oder \; l_{1,j} = 1 - y_l, \; mit \;\; passendem \;\; l$$

$$\bar{l}_{2,j} \geq x_2, \forall j \in \{1,\dots,k_2\};\; wobei \;\; l_{2,j} = y_l \; oder \; l_{2,j} = 1 - y_l, \; mit \;\; passendem \;\; l$$

$$\dots$$

$$\bar{l}_{m,j} \geq x_m, \forall j \in \{1,\dots,k_m\};\; wobei \;\; l_{m,j} = y_l \; oder \; l_{m,j} = 1 - y_l, \; mit \;\; passendem \;\; l$$

$$x_1 + \dots + x_m \geq 1$$

QLPs und QIPs

Komplexität von QLPs ist unbekannt. Jedoch:

F-QLPs sind coNP-schwer.

Beweis (Forts.):

Sei das QLP G‘ die LP-Relaxierung von QIP.

Behauptung: G hat eine Lösung, genau dann, wenn G‘ eine Lösung besitzt.

In beiden Fällen sollen die Allvariablen diskret sein, was in QIPs gegeben ist, und was nach vorigen Recherchen nicht die Lösbarkeit der QLP-Systeme ändert.

G => G‘: klar. Wenn es gegen diskrete y-Variablen eine ganzzahlige Gewinn-strategie für X gibt, gibt es auch eine kontinuierlche Lösung.

G‘ => G:

Es gibt eine nicht-ganzzahlige Strategie $\underline{x}$ für G‘.

$\Rightarrow$ mindestens eine x-Variable x_i wird in der Strategie $\underline{x}$ auf einen Wert > 0 gesetzt.

$\Rightarrow$ auf der „linken Seite“ der Ungleichungen, die x_i beschränken, sind alle Terme > 0.

$\Rightarrow$ alle diese Terme sind = 1, denn sie sind von der Form $y \geq x_i$ oder $1-y \geq x_i$.

$\Rightarrow$ man kann x_i auf 1 setzen.