TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Computerschach

Grundlagen II

Spielbäume und Fehlerfilter

Untersuchung des Phänomens

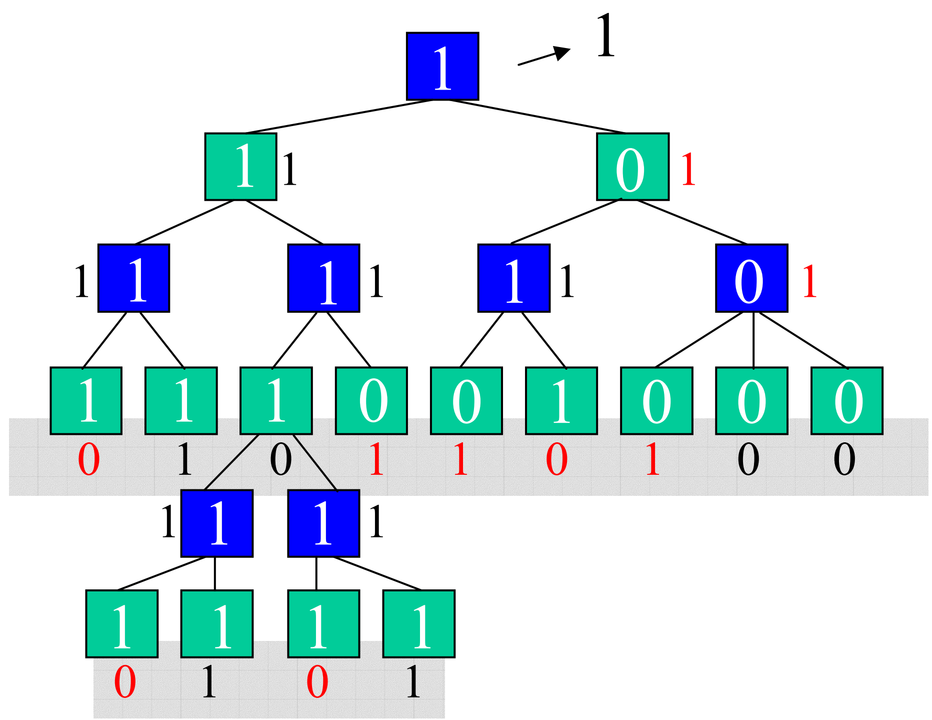
Fragestellung: Was ist in diesen Spielbäumen z.B. des Schachspiels, das heuristische Spielbaumsuche so erfolgreich macht?

(Nau ’79; Pearl ’83; Schrüfer ’86; Althöfer ’88; Scheucher&Kaindl ’89, Lorenz&Monien STACS ’02, TCS ’05)

Anwendung: Starkes Spiel gegen schwächere Gegner
(Lorenz ESA ’04, ICGA Journal ’06)

Fehleranalyse

Gegeben: **Spielbaum G**, jeder Knoten hat einen **´echten´ Wert** 0|1; diese Werte gehorchen dem Minimax-Prinzip. So genannte **´heuristische´ Werte** werden den Blättern von G zugewiesen, und diese heuristischen Werte werden genutzt, um heuristische Minimax-Werte für innere Knoten zu bestimmen.



Fehleranalyse

Verschiedene Fragestellungen sind möglich:

- Wie viele Fehler darf ich im günstigsten Fall machen?
  wenn Spielbaum G b/t-uniform ist: $b^t - b^{\lfloor t/2 \rfloor}$
- Sei n die Anzahl der Blätter von G. Wie wirkt es sich aus, wenn man (ungefähr) k Fehler bei Blattbewertungen macht?
- Wie viele Fehler darf man an den Blättern im schlimmsten Fall machen?

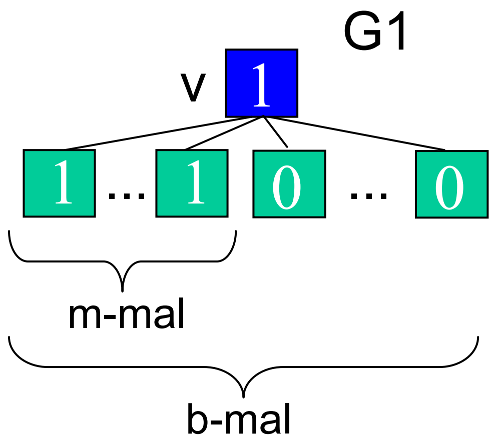
Fehleranalyse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

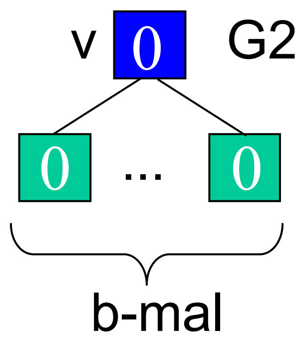
Modell I

- Fehler an Blättern werden mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\overline{p}$ (= 1-p) gemacht.

  $v_1,\dots v_b$ seien die Nachfolger von v, $g_1(p),\dots,g_b(p)$ seien die Wahrscheinlichkeiten, dass die heuristischen Werte $h_1,\dots,h_b$ der Knoten $v_1,\dots,v_b$ gleich den echten Werten $w_1,\dots,w_b$ sind. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der heuristische Minimaxxwert von v gleich dem echten Wert von v ist wie folgt:



$$Q_v(p) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{m}(1-g_i(p)) \bullet \prod_{i=m+1}^{b} g_i(p)\right)$$



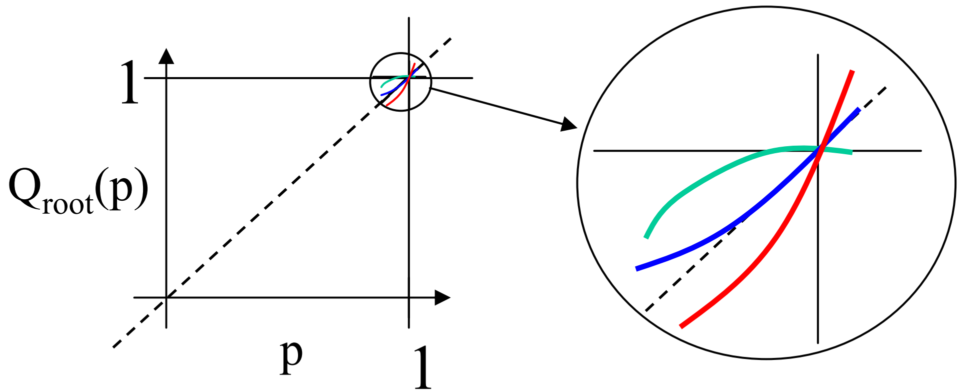
$$Q_v(p) = \prod_{i=1}^{b} g_i(p)$$

Fehleranalyse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Modell I

- Fehler an Blättern werden mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\overline{p}$ (= 1-p) gemacht.
- Für jeden Knoten v des Spielbaums G, gibt es somit ein „Qualitätspolynom“ $Q_v(p)$, welches die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass der echte und der heuristische Wert am Knoten v gleich sind.



- Intuitive Erklärung für besseres Spiel bei tieferer Suche:
  Super-Bäume haben kleinere Fehlerwahrscheinlichkeiten an ihren Wurzeln, zumindest wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit am Blatt klein genug ist.
- Robustheit kann dann definiert werden mit Hilfe $Q_{root}^{(k)}(1)$, k=1,...

Fehleranalyse

Modell I, Zusammenhang mit Average-Case Analyse

Sei G Spielbaum mit n Blättern und s der 0/1-Blattstring der echten Werte. s‘ sei der verfälschte String. p sei die Wahrscheinlichkeit dafür, einen heuristischen Blattwert korrekt zu erkennen. Die Anzahl korrekter heuristischer Blattbewertungen ist Binomialverteilt. Man kann dann sagen: „Man macht ungefähr n*(1-p) Fehler“

```
0 1 0 1 1 1 0   - s
0 0 1 0 0 0 1   - s‘1  }
1 1 1 0 0 0 1   - s‘2  }  C1 -> c1
....
0 1 1 0 0 0 1   - s‘3  }  C2 -> c2
....                   }
```

C_i sind Cluster, die Strings mit genau c_i korrekten Bewertungen enthalten.

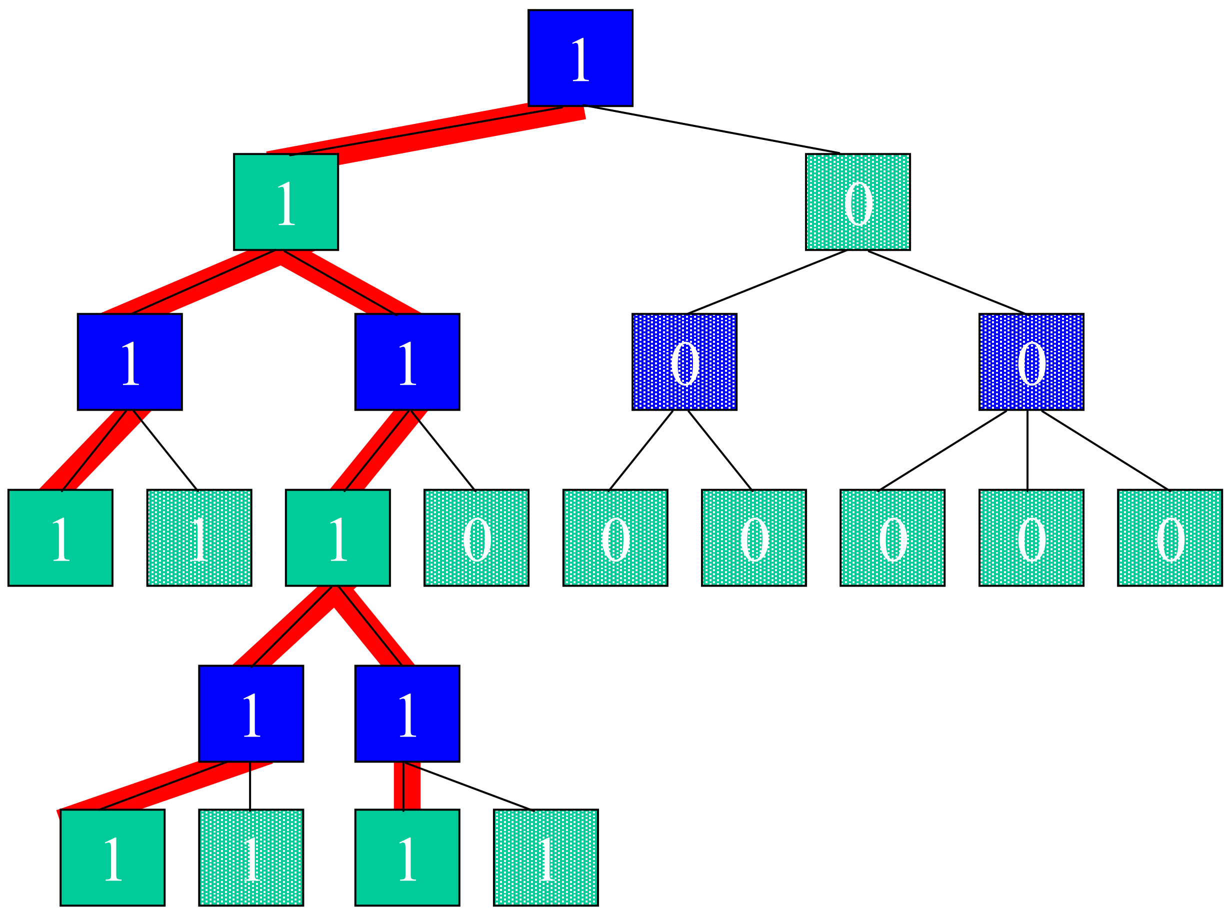
$Q_G(p) = \Sigma^n_{i=0}$ Prob(heur. Wurzelwert ist korrekt | es gibt genau i richtig klassifizierte Blätter) * Prob(genau i heur. Blattwerte sind korrekt)

$$= \sum_{i=0}^{n} c_i \,|\, C_i \,|\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

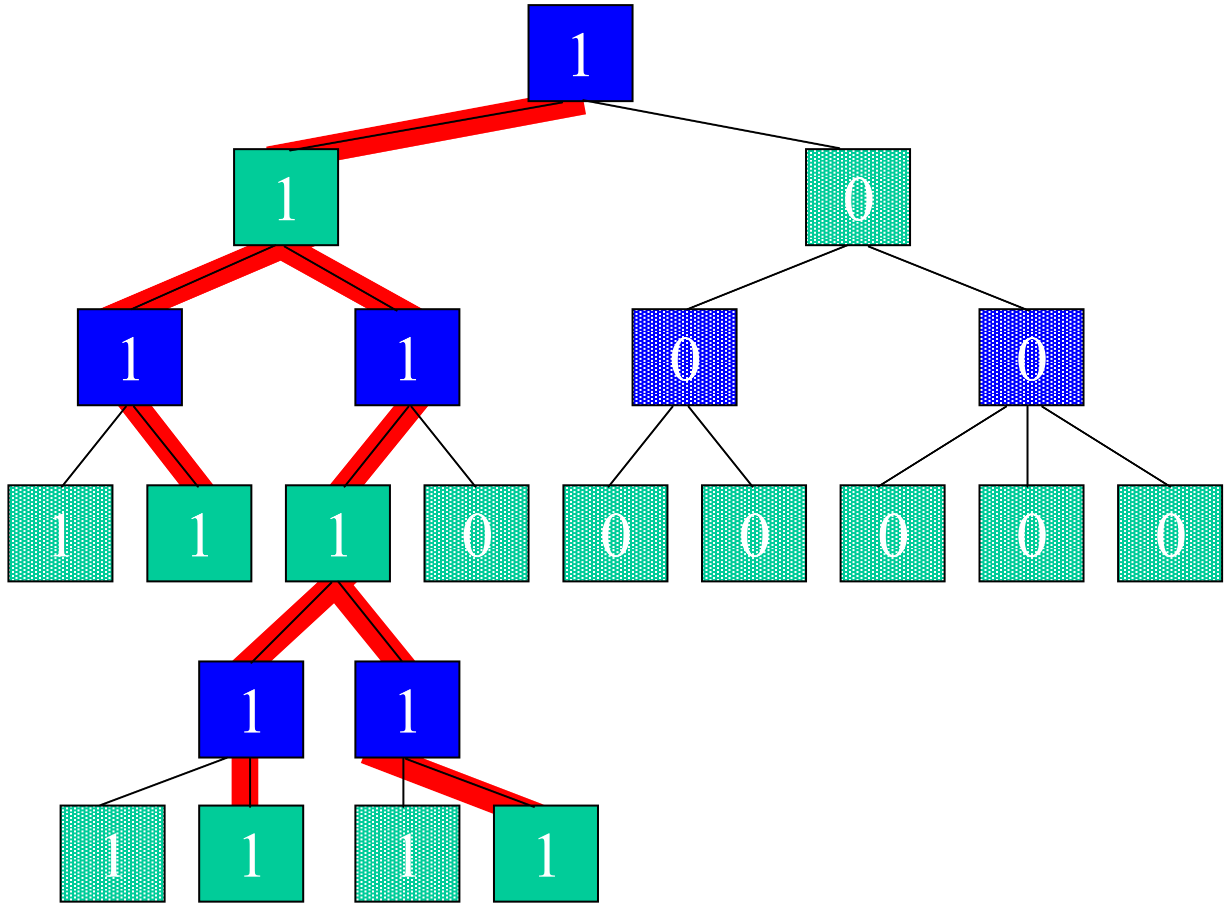
Fehleranalyse

Modell II



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Modell II



Fehleranalyse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ergebnisse

Lemma: $Q_{root}'(1) = 0$ oder $Q_{root}'(1) \geq 1$, wobei Q‘ erste Ableitung von Q

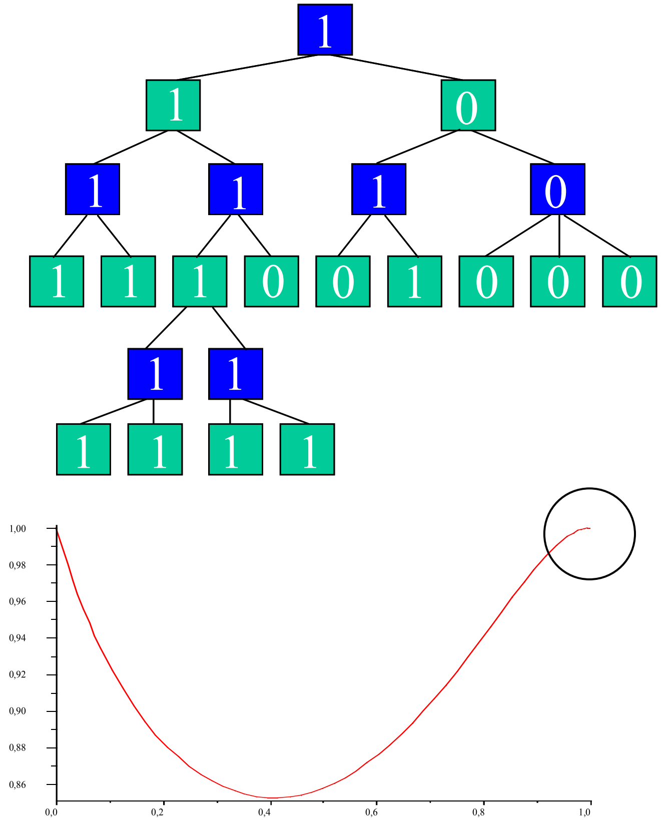
Lemma: Falls $Q_{root}'(1) \geq 1$, beschreibt $Q_{root}'(1)$ die Anzahl der Blätter, die den Wurzelwert durch einen Single-Flip ändern können.

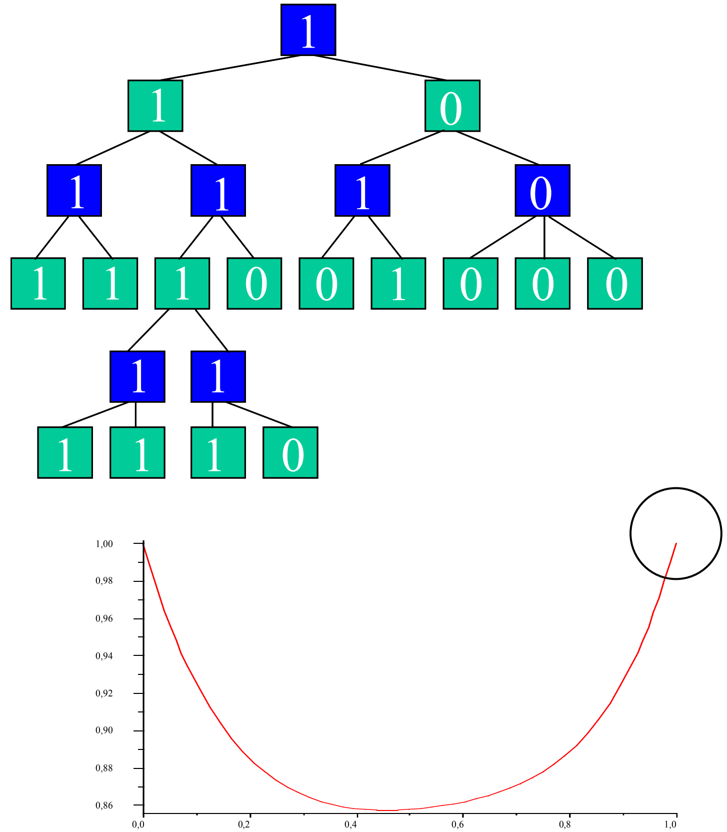
Theorem: $Q_{root}'(1) = 0$ gilt g.d.w. G mindestens 2 blatt-disjunkte Strategien enthält, die den Wurzelwert belegen.

Fehleranalyse

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ergebnisse





Fehleranalyse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ergebnisse

Die zwei Modelle mit ihren Robustheitsmaßen sind äquivalent zueinander.

Es gibt n+1 blattdisjunkte Strategien in G, die alle den Wurzelwert von G belegen.

(Modell II)

<=>

$$Q_{root}^{(n)}(1) = Q_{root}^{(n-1)}(1) = \ldots = Q_{root}^{(1)}(1) = 0$$

(Modell I)

Taylorreihenentwicklung $f(p) = f'(1)(p-1)+\ldots+(f^{(n)}(1)/n!)*(p-1)^n + R_{n+1}(p)$ führt uns zu

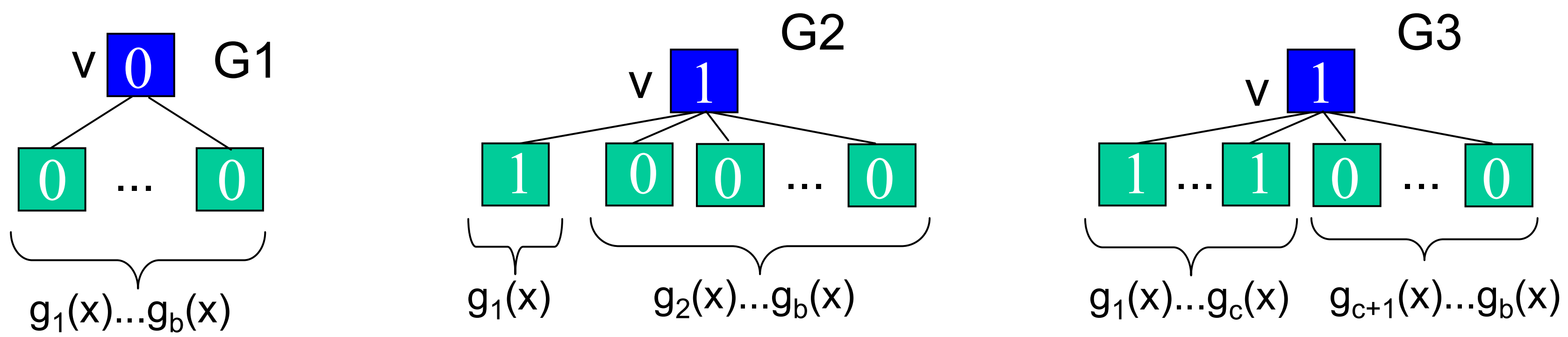
$|\, Q_{root}(p) - Q_{root}(1)\, | = O((1-p)^{n+1})$ g.d.w. es n+1 viele blatt-disjunkte Startegien gibt.

Fehleranalyse

ad Lemma: $Q_{root}'(1) = 0$ oder $Q_{root}'(1) \geq 1$, wobei Q‘ erste Ableitung von Q

ad Theorem: $Q_{root}'(1) = 0$ gilt g.d.w. G mindestens 2 blatt-disjunkte Strategien enthält, die den Wurzelwert belegen.

Betrachte die folgenden 3 Tiefe-1 Bäume:



Fehleranalyse

$$Q_{G1}(x) = g_1(x) \cdots g_b(x)$$

$$Q_{G2}(x) = 1 - (1 - g_1(x)) \cdot g_2(x) \cdots g_b(x)$$

$$Q_{G3}(x) = 1 - (1 - g_1(x)) \cdots (1 - g_c(x)) \cdot g_{c+1}(x) \cdots g_b(x)$$

$$Q'_{G1}(x) = \sum_{i=1}^{b} g_1(x) \cdots g'_i(x) \cdots g_b(x)$$

$$Q'_{G2}(x) = -(1 - g_1(x))' \cdot g_2(x) \cdots g_b(x) + \sum_{i=2}^{b} (1 - g_1(x)) \cdot g_2(x) \cdots g'_i(x) \cdots g_b(x)$$

$$Q'_{G3}(x) = -\sum_{i=1}^{c} (1 - g_1(x)) \cdots (1 - g_i(x))' \cdots (1 - g_c(x)) \cdot g_{c+1}(x) \cdots g_b(x)$$

$$- \sum_{i=c+1}^{b} (1 - g_1(x)) \cdots (1 - g_c(x)) \cdot g_{c+1}(x) \cdots g'_i(x) \cdots g_b(x)$$

$$Q'_{G1}(1) = g'_1(1) + \cdots + g'_b(1)$$

$$Q'_{G2}(1) = g'_1(1)$$

$$Q'_{G3}(1) = 0$$

Fehleranalyse

ad Theorem: Es gibt n+1 blattdisjunkte Strategien in G, die alle den Wurzelwert von G belegen. <=> $Q_{root}^{(n)}(1) = Q_{root}^{(n-1)}(1) = \ldots = Q_{root}^{(1)}(1) = 0$

Allgemein läßt sich die n-te Ableitung eines Produkts von Polynomen darstellen als

$$\sum_{y_1+\ldots+y_b=n} a(y_1,\ldots,y_b) g_1^{(y_1)}(x) \cdots g_b^{(y_b)}(x)$$

mit geeigneten $a(y_1,\ldots,y_b) \in \mathbb{N}$.

Zu betrachten sind nun wieder die Ableitungen von Q_{G1}, Q_{G2}, Q_{G3}.

Fehleranalyse

Annahmen:

(i) Für alle $i \leq n$ gilt: Für alle Spielbäume G gibt es i blattdisjunkte Strategien in G, die alle den Wurzelwert von G belegen. $\Leftrightarrow Q_G^{(i-1)}(1) = \dots = Q_G^{(1)}(1) = 0$

(ii) Für alle $G' \in \{G1, G2, G3\}$ soll gelten: Es gibt n blattdisjunkte Strategien in G‘, die alle den Wurzelwert von G' belegen **und** $Q_{G'}^{(n-1)}(1) = \dots = Q_{G'}^{(1)}(1) = 0$

(iii) Für alle $i \in \{1,..,n-1\}$ gilt: das Vorzeichen von $Q_{G'}^{(i)}(1) = (-1)^{i-1}$

Bemerkung: Im folgenden machen wir Vorbetrachtungen für einen Induktionsbeweis über die Anzahl von blattdisjukten Strategien und über die Höhe der Bäume. (i) und (iii) werden die Induktionsvoraussetzung bilden, und (II) wird aus „$Q_G^{(n)}(1) = \dots = Q_G^{(1)}(1) = 0$“ oder aus „es gibt n+1 blattdisjunkte Stragegien ...“ hergeleitet werden.

Fehleranalyse

n-te Ableitung für G1:

$$Q_{G1}^{(n)}(x) = \sum_{y_1+\ldots+y_b=n} a(y_1,\ldots,y_b) g_1^{(y_1)}(x) \cdots g_b^{(y_b)}(x)$$

Alle Summanden, die weniger als Ableitungen kleiner als n enthalten sind Null bei x=1, wegen Voraussetzung (ii). Da $g_i(1) = 1$ für alle i, gilt:

$$Q_{G1}^{(n)}(1) = \sum_{i=1}^{b} g_i^{(n)}(1)$$

n-te Ableitung für G2:

$$Q_{G2}^{(n)}(x) = (-1) \cdot \sum_{y_1+\ldots+y_b=n} a(y_1,\ldots,y_b)(1-g_1(x))^{(y_1)} \cdot g_2^{(y_2)}(x) \cdots g_b^{(y_b)}(x)$$

Mit Hilfe von (ii) sieht man, dass bei x=1 nur ein Summand ungleich 0 wird:

$$Q_{G2}^{(n)}(1) = g_1^{(n)}(1)$$

Fehleranalyse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

n-te Ableitung für G3:

$$Q_{G3}^{(n)}(x) = (-1) \cdot \sum_{y_1+\ldots+y_b=n} a(y_1,\ldots,y_b)(1-g_1(x))^{(y_1)} \cdots (1-g_c(x))^{(y_c)} \cdot g_{c+1}^{(y_{c+1})}(x) \cdots g_b^{(y_b)}(x)$$

1. Fall n < c: Einer der ersten c Faktoren ist immer = 0 und es gibt, wegen der Definition von „Strategie" n blattdisjunkte Strategien unterhalb der Wurzel. Also:
$$Q_{G3}^{(n)}(1) = 0$$

2. Fall n = c: Sei $S_{y1,\ldots,yb}$ ein beliebiger Summand von $Q^{(n)}_{G3}(x)$ bei x=1. Falls es ein l gibt mit l ≤ c und (y_l = 0 oder y_l > 1), folgt $S_{y1,\ldots,yb}$ = 0, weil einer der ersten c Wurzelnachfolger (sei das k) gilt: 1-g_k(1) = 0. Falls es ein l>c gibt mit y_l > 0, folgt ebenfalls sofort $S_{y1,\ldots,yb}$ = 0. Sonst gilt
$$S_{y_1,\ldots,y_b}(1) = (-1)^c \cdot \prod_{i=1}^{c} g_i^{(1)}(1)$$

Vorzeichen: $(-1)(-1)^n \cdot k \cdot \prod_{i=1}^{n} g_i^{(1)}(1),\ \textit{für ein } k \in \mathbb{N}$

Fehleranalyse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

n-te Ableitung für G3:

3. Fall $n > c$: Sei $S_{y1,\dots,yb}$ ein beliebiger Summand von $Q^{(n)}_{G3}(x)$ bei $x=1$.
   a) Falls es ein l gibt mit $l \leq c$ und $y_l = 0$, folgt $S_{y1,\dots,yb} = 0$
   b) Falls es ein l gibt mit $l > c$ und $y_l > 1$, gilt: $\sum^{c}_{i=1} y_i \leq n-1$. $S_{y1,\dots,yb}$ hat die Form $(1-g_1(x))^{y1} \cdots (1-g_c(x))^{yc} \cdot X$, X eine reele Zahl. Wegen Annahme (ii) gibt es unter n blattdisjunkte Strategien unter der Wurzel von G3. Wegen der Definition von Strategien gibt es die Summe der blattdisjunkten Strategien unter den ersten c Nachfolgern der Wurzel ebenfalls gleich n. Wir können also schließen, dass einer der ersten c Nachfolger mehr als y_i-viele blattdisjunkte Stretegien unter sich hat. Mit Voraussetzung (i) folgt, dass ein $(1-g_i(x))^{(y_i)}$ an der Stelle $x=1$ zu 0 wird, für ein $i \in \{1,\dots,c\}$
   c) $\sum^{c}_{i=1} y_i = n$ und $y_i > 1$ für sie ersten c Wurzelnachfolger

$$Q^{(n)}_{G3}(x) = -\sum_{y_1+\ldots+y_b=n} a(y_1,\ldots,y_c,0,\cdots 0)(1-g_1(x))^{(y_1)} \cdots (1-g_c(x))^{(y_c)}$$

Fehleranalyse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

n-te Ableitung für G3, 3. Fall:

$$Q_{G3}^{(n)}(x) = (-1)^{c+1} \sum_{y_1+\ldots+y_c=n} a(y_1,\ldots,y_c,0,\cdots 0) g_1^{(y_1)}(x) \cdots g_c^{(y_c)}(x)$$

Vorzeichen:
Wegen Voraussetzung (iii) ist das Vorzeichen von

$$sign(Q_{G3}^{(n)}(1)) = (-1)(-1)^c \cdot \prod_{i=1}^{c} sign(g_i^{(y_i)}(1)), \; mit \sum_{i=1}^{c} y_i = n$$

Sei $k_i = y_i - 1$, für $i = 1,\ldots,c$. Somit ist $(-1)^{k_i}$ das Vorzeichen von $g_i^{(y_i)}(1)$. (vgl. (iii))
Da $\sum_{i=1}^{c} k_i = n-c$, folgt,

$$sign(Q_{G3}^{(n)}(1)) = (-1)(-1)^c \cdot \prod_{i=1}^{c} (-1)^{k_i} = (-1)^{n-1}$$

Fehleranalyse

Induktion:

Annahme:

(I) Für alle $i \leq n$ gilt: Für alle Spielbäume G gibt es i blattdisjunkte Strategien in G, die alle den Wurzelwert von G belegen. <=> $Q_G^{(i-1)}(1) = \ldots = Q_G^{(1)}(1) = 0$

(II) Für alle $i \in \{1,..,n-1\}$ gilt: das Vorzeichen von $Q_{G'}^{(i)}(1) = (-1)^{i-1}$

Induktionsschritt (n → n+1):

'<=': Es gibt n+1 blattdisjunkte Strategien unter der Wurzel von G. Insbesondere gibt es n blattdisjunkte Strategien und mit (I) und (II) wissen wir, dass die Voraussetzungen (i)-(iii) erfüllt sind. Mit hilfe einer inneren impliziten Induktion sehen wir, dass der Induktionsschritt bereits gemacht ist.

'=>': Sei Q_G ein Qualitätspolynom. Seien $Q_G^{(n)}(1) = \ldots = Q_G^{(1)}(1) = 0$. Offensichtlich gilt auch $Q_G^{(n-1)}(1) = \ldots = Q_G^{(1)}(1) = 0$. Von (I) wissen wir, dass es n blattdisjunkte Strategien in G gibt, und (i)-(iii) sind erfüllt. Mit Hilfe einer impliziten Induktion über die Tiefe von G ist der Induktionsschritt fertig. Man muss allerdings beachten, dass für alle i = 1,...,n gilt $\mathrm{sign}(Q_G^{(i)}(1)) = (-1)^{i-1}$ ist.

Fehleranalyse

Worst-Case Betrachtung:

Satz:

Sei G ein Spielbaum mit Wert 0 oder 1 an der Wurzel. Sei oBdA die Wurzel ein MAX-Knoten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- es gibt c-viele blattdisjunkte Strategien unter der Wurzel von G, die beweisen, dass der wert der Wurzel 0 (bzw. 1) ist.
- man muss mindestens c-viele Blattwerte, bezogen auf die echten Werte, verändern, damit der heuristische Minimaxwert der Wurzel falsch wird.

‚=>' klar, denn mit der Veränderung eines Blattwertes kann man nur eine der blattdisjunkten Strategien „zerstören".

‚<=, Wir bauen per Induktion über die Baumtiefe t eine „Zerstörungsstrategie", die mit c Änderungen die c blattdisjunkten Strategien zerstört.

Start: Sei t = 1. Der Baum besteht nur aus einem Knoten, damit gibt es nur eine Strategie und mit Änderun eines Blattes wird der Wurzelwert verfälscht.

Fehleranalyse

Worst-Case Betrachtung:

,<=, ...

Annahme: Für alle Tiefe-(t-1)-Bäume gilt, wenn G genau c (c beliebig) blattdisjunkte Strategien enthält, die alle den wert 0 (bzw. 1) der Wurzel beweisen, läßt sich der Wurzelwert mit Hilfe von c Blattwertänderungen verfälschen.

Schritt t-1 → t: Betrachte die Wurzel eine Tiefe-t-Spielbaums.

- Ist der echte Wert 0, so gibt es für alle Nachfolger c blattdisjunkte Strategien, die den Wert 0 belegen. Mindestens 1 Nachfolger besitzt genau c solche Strategien. Auf den wenden wir die obige Annahme an und sind fertig.
- Ist der Wert der Wurzel 1, gibt es d viele Nachfolger, die ebenfalls den Wert 1 haben und die Summe der Anzahl blattdisjunkter Strategien unter diesen Wurzelnachfolgern ist gleich c. Mit Hilfe der Induktionsannahme zerstören wir alle diese Strategien.