Selters, Evian und andere teure Fluide

Matthias Geißert

TU Darmstadt

Januar 2009

Die Hauptakteure

Inkompressible Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho\partial_t v + \rho(v\cdot\nabla)v &= \mu\Delta v - \nabla q + f, && x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0, \\ \mathrm{div}\ v &= 0, && x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0, \qquad \text{(NS)} \\ v(x,0) &= v_0(x), && x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Gegeben:

- Dichte: ρ
- Viskosität: μ
- Anfangsgeschwindigkeitsfeld: v_0, wobei v_0 divergenzfrei ist
- Äußere Kraft: f

Gesucht:

- Geschwindigkeitsfeld $v(t,\cdot)$ zum Zeitpunkt $t>0$
- Druck $q(t,\cdot)$ zum Zeitpunkt $t>0$

Physikalische Motivation

Impulserhaltung:

$$\rho \partial_t v + \rho (v \cdot \nabla) v = \mu \Delta v - \nabla q$$

Massenerhaltung:

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}\ \rho v = 0$$

Physikalische Motivation

Impulserhaltung:

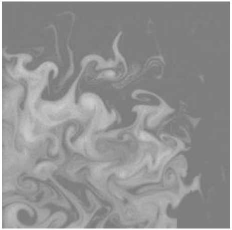
$$\rho \partial_t v + \rho (v \cdot \nabla) v = \mu \Delta v - \nabla q$$

Massenerhaltung:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho v = 0$$

Millenium Problem No. 3: Navier-Stokes Equation

Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make **substantial progress toward a mathematical theory** which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.



Millenium Prize

In order to celebrate mathematics in the new millennium, The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI) has named seven Prize Problems. The Scientific Advisory Board of CMI selected these problems, focusing on important classic questions that have resisted solution over the years. The Board of Directors of CMI designated a **$7 million prize fund for the solution to these problems, with $1 million allocated to each.** During the Millennium Meeting held on May 24, 2000 at the Collège de France, Timothy Gowers presented a lecture entitled *The Importance of Mathematics*, aimed for the general public, while John Tate and Michael Atiyah spoke on the problems. The CMI invited specialists to formulate each problem.

Charles L. Fefferman: Millenium Problem

- **Existenz von glatten Lösungen von (NS).**
  Sei $\mu > 0$, $n = 3$, $f \equiv 0$ und $v_0 \in S(\mathbb{R}^3)$ ein divergenzfreies Vektorfeld. Dann existiert eine Lösung $(q, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, die (NS) genügt und beschränkte Energie hat.
- **Nicht-Existenz von glatten Lösungen von (NS).**
  Sei $\mu > 0$ und $n = 3$. Dann existiert ein divergenzfreies Vektorfeld $v_0 \in S(\mathbb{R}^3)$ und ein $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, so dass keine Lösung (q, v) in $C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ von (NS) mit beschränkter Energie existiert.

Definition

Eine Lösung (u, p) von (NS) besitzt endliche Energie, falls

$$\langle u(t,\cdot), u(t,\cdot)\rangle_{\mathbb{R}^n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 \, dx \leq C, \quad t \geq 0.$$

Milde Lösungen

Idee zur Konstruktion milder Lösungen

- Schreibe (NS) in abstrakter Form

$$u'(t) - Au(t) = f(u), \quad t > 0,$$
$$u(0) = u_0.$$

- Schreibe dieses Problem um in eine Integralgleichung

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(u)\, ds.$$

- Löse die Integralgleichung.

Idee zur Konstruktion milder Lösungen

- Schreibe (NS) in abstrakter Form

$$\begin{aligned} u'(t) - Au(t) &= f(u), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

- Schreibe dieses Problem um in eine Integralgleichung

$$u(t) = \mathrm{e}^{At} u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} f(u)\, ds.$$

- Löse die Integralgleichung.

Idee zur Konstruktion milder Lösungen

- Schreibe (*NS*) in abstrakter Form

$$u'(t) - Au(t) = f(u), \quad t > 0,$$
$$u(0) = u_0.$$

- Schreibe dieses Problem um in eine Integralgleichung

$$u(t) = \mathrm{e}^{At} u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} f(u)\, ds.$$

- Löse die Integralgleichung.

Helmholtz-Projektion

Wir definieren:

$$L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) := \overline{C^\infty_{c,\sigma}(\mathbb{R}^n)^n}^{L^p(\mathbb{R}^n)^n},$$

$$G_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ g \in L^p(\mathbb{R}^n)^n : g = \nabla q \text{ für ein } q \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^n \right\}.$$

Dann gilt:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G_p(\mathbb{R}^n).$$

Die (stetige) Projektion $P : L^p(\mathbb{R}^n)^n \to L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ heißt *Helmholtz-Projektion*.
Insbesondere:

$$Pg = 0, \quad g \in G_p(\mathbb{R}^n).$$

Helmholtz-Projektion

Wir definieren:

$$L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) := \overline{C^\infty_{c,\sigma}(\mathbb{R}^n)^n}^{L^p(\mathbb{R}^n)^n},$$
$$G_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ g \in L^p(\mathbb{R}^n)^n : g = \nabla q \text{ für ein } q \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^n \right\}.$$

Dann gilt:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G_p(\mathbb{R}^n).$$

Die (stetige) Projektion $P : L^p(\mathbb{R}^n)^n \to L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ heißt *Helmholtz-Projektion*.
Insbesondere:

$$Pg = 0, \quad g \in G_p(\mathbb{R}^n).$$

Helmholtz-Projektion

Wir definieren:

$$L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) := \overline{C^\infty_{c,\sigma}(\mathbb{R}^n)^n}^{L^p(\mathbb{R}^n)^n},$$

$$G_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ g \in L^p(\mathbb{R}^n)^n : g = \nabla q \text{ für ein } q \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^n \right\}.$$

Dann gilt:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G_p(\mathbb{R}^n).$$

Die (stetige) Projektion $P : L^p(\mathbb{R}^n)^n \to L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ heißt *Helmholtz-Projektion*.

Insbesondere:

$$Pg = 0, \quad g \in G_p(\mathbb{R}^n).$$

Helmholtz-Projektion

Wir definieren:

$$L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) := \overline{C^\infty_{c,\sigma}(\mathbb{R}^n)^n}^{L^p(\mathbb{R}^n)^n},$$
$$G_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ g \in L^p(\mathbb{R}^n)^n : g = \nabla q \text{ für ein } q \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^n \right\}.$$

Dann gilt:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \oplus G_p(\mathbb{R}^n).$$

Die (stetige) Projektion $P : L^p(\mathbb{R}^n)^n \to L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ heißt *Helmholtz-Projektion*.
Insbesondere:

$$Pg = 0, \quad g \in G_p(\mathbb{R}^n).$$

Stokes Operator

Setze

$$Au = \Delta u$$
$$\mathcal{D}(A) := W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$$

Dann ist (NS) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t u - Au + P(u \cdot \nabla)u &= 0, \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \qquad \text{(ANS)}$$

für $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Stokes Operator

Setze

$$Au = \Delta u$$
$$\mathcal{D}(A) := W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$$

Dann ist (NS) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t u - Au + P(u \cdot \nabla)u &= 0, \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \qquad \text{(ANS)}$$

für $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Integralgleichung

- Löse (*ANS*) mit Hilfe der Variation der Konstanten Formel

$$u(t) = \mathrm{e}^{At} u_0 - \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} P\,(u \cdot \nabla u)\,(s)\; ds, \quad t \in (0, T).$$

- **Problem:** Wie definiert man e^{At}?
  (Beachte: A ist ein *unbeschränkter* Operator)
  Lösung: Halbgruppentheorie

Integralgleichung

- Löse (*ANS*) mit Hilfe der Variation der Konstanten Formel

$$u(t) = \mathrm{e}^{At} u_0 - \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} P\,(u \cdot \nabla u)\,(s)\; ds, \quad t \in (0, T).$$

- **Problem:** Wie definiert man e^{At}?
  (Beachte: *A* ist ein *unbeschränkter* Operator)
  Lösung: Halbgruppentheorie

Integralgleichung

- Löse (*ANS*) mit Hilfe der Variation der Konstanten Formel

$$u(t) = \mathrm{e}^{At} u_0 - \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} P\,(u \cdot \nabla u)\,(s)\; ds, \quad t \in (0, T).$$

- **Problem:** Wie definiert man e^{At}?
  (Beachte: *A* ist ein *unbeschränkter* Operator)
  Lösung: Halbgruppentheorie

Halbgruppen

- Es ist bekannt, dass A eine Halbgruppe auf $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ erzeugt.
- Insbesondere löst dann $u(t) := \mathrm{e}^{At} u_0$

$$\begin{aligned} u'(t) - Au(t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wobei $u_0 \in L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Definition (T. Kato, 1984)

Eine Funktion $u \in C([0,T); L^n_\sigma(\mathbb{R}^n))$ heißt *milde Lösung* von (ANS), falls

$$u(t) = \mathrm{e}^{At} u_0 - \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} P\,(u \cdot \nabla u)\,(s)\; ds, \quad t \in (0,T).$$

Erwartete Ergebnisse

- Globale Existenz für kleine Anfangsdaten,
- lokale Existenz für große Anfangsdaten (Existenzintervall hängt nur von der Norm des Anfangswerts ab),
- Eindeutigkeit,
- glatte Lösungen.

Erwartete Ergebnisse

- Globale Existenz für kleine Anfangsdaten,
- lokale Existenz für große Anfangsdaten (Existenzintervall hängt nur von der Norm des Anfangswerts ab),
- Eindeutigkeit,
- glatte Lösungen.

Erwartete Ergebnisse

- Globale Existenz für kleine Anfangsdaten,
- lokale Existenz für große Anfangsdaten (Existenzintervall hängt nur von der Norm des Anfangswerts ab),
- Eindeutigkeit,
- glatte Lösungen.

Bekannte Resultate

- $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$: J. Leray, 1933/34.
- $u_0 \in D((-A)^{\frac{1}{4}})$, beschränkte Gebiete: H. Fujita, T. Kato, 1964.
- $u_0 \in L^n(\mathbb{R}^n)$: T. Kato ,1984.
- $u_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$: M. Cannone, 1997.
- $u_0 \in \mathrm{BMO}^{-1}$: H. Koch, D. Tataru, 2001.
- $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ geht nicht: J. Bourgain, N. Pavlovic, Preprint 2008.

Bekannte Resultate

- $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$: J. Leray, 1933/34.
- $u_0 \in D((-A)^{\frac{1}{4}})$, beschränkte Gebiete: H. Fujita, T. Kato, 1964.
- $u_0 \in L^n(\mathbb{R}^n)$: T. Kato ,1984.
- $u_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$: M. Cannone, 1997.
- $u_0 \in \mathrm{BMO}^{-1}$: H. Koch, D. Tataru, 2001.
- $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ geht nicht: J. Bourgain, N. Pavlovic, Preprint 2008.

Globale Existenz

- Durch Multiplizieren von (ANS) mit u erhalten wir die A-Priori Abschätzung

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $t > 0$, für die die Lösung existiert.

- **Fall** $n = 2$:
Lösung existiert für $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ nach T. Kato.
Mittels A-Priori Abschätzung lässt sich die Lösung immer weiter fortsetzen $\Rightarrow$ globale Lösungen.

- **Fall** $n = 3$:
Lösung existiert für $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ nach T. Kato.
A-Priori Abschätzung ist nicht gut genug, um die Lösung zu kontrollieren $\not\Rightarrow$ globale Lösungen.

Globale Existenz

- Durch Multiplizieren von (ANS) mit u erhalten wir die A-Priori Abschätzung

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $t > 0$, für die die Lösung existiert.

- **Fall** $n = 2$:
Lösung existiert für $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ nach T. Kato.
Mittels A-Priori Abschätzung lässt sich die Lösung immer weiter fortsetzen $\Rightarrow$ globale Lösungen.

- **Fall** $n = 3$:
Lösung existiert für $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ nach T. Kato.
A-Priori Abschätzung ist nicht gut genug, um die Lösung zu kontrollieren $\not\Rightarrow$ globale Lösungen.

Globale Existenz

- Durch Multiplizieren von (ANS) mit u erhalten wir die A-Priori Abschätzung

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $t > 0$, für die die Lösung existiert.

- **Fall** $n = 2$:
Lösung existiert für $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ nach T. Kato.
Mittels A-Priori Abschätzung lässt sich die Lösung immer weiter fortsetzen $\Rightarrow$ globale Lösungen.
- **Fall** $n = 3$:
Lösung existiert für $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ nach T. Kato.
A-Priori Abschätzung ist nicht gut genug, um die Lösung zu kontrollieren $\not\Rightarrow$ globale Lösungen.

Schwache Lösungen

Schwache Lösungen

Definition (J. Leray, 1934)

$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$ mit $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^n))$ heißt *schwache Lösung* von (NS) falls:

- (Gleichung im (sehr) schwachen Sinne erfüllt).

$$\int_0^s \langle u, \partial_t \varphi + \Delta\varphi - u \cdot \nabla\varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u(s,\cdot), \varphi(s,\cdot)\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle u_0, \varphi(0,\cdot)\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

$$s \geq 0,\ \ \varphi \in C_c^\infty([0,\infty; C_{c,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^n)^n)$$

- (starke Energie-Ungleichung). Für $s_1 \geq 0$, $s > s_1$ gilt

$$\frac{1}{2}\|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{s_1}^s \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, dt \leq \frac{1}{2}\|u(s_1,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Idee zur Konstruktion schwacher Lösungen

- Formales Multiplizieren von (NS) mit u und part. Integration liefern die *Energie-Gleichung*:

$$\frac{1}{2}\|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^s \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, dt = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad s > 0.$$

- Verwende Approximation zur Konstruktion einer schwachen Lösung.

Idee zur Konstruktion schwacher Lösungen

- Formales Multiplizieren von (*NS*) mit u und part. Integration liefern die *Energie-Gleichung*:

$$\frac{1}{2}\|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^s \|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad s > 0.$$

- Verwende Approximation zur Konstruktion einer schwachen Lösung.

Erwartete Eigenschaften

Dieses Verfahren liefert

- Globale Existenz schwacher Lösungen

Bekannte Resultate

- $\mathbb{R}^3$: schwache Lösungen, J. Leray, 1934.
- Gebiete: „schwache“ Lösungen, E. Hopf, 1951.
- beschränkte Gebiete in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$: A. A. Kiselev, O. A. Ladyzhenskaya, 1957-69.
- $\mathbb{R}^n$, beschränke Gebiete: *geeigente* schwache Lösungen, L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, 1982.

Die Serrin-Bedingung

Definition

Eine schwache Lösung u von (NS) genügt der *Serrin-Bedingung*, falls $u \in L^p(\mathbb{R}_+; L^q(\mathbb{R}^n))$ mit

$$\frac{n}{q} + \frac{2}{p} \leq 1.$$

Grenzfall: $q = n$: $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^n(\mathbb{R}^n))$.

Die Serrin-Bedingung

Definition

Eine schwache Lösung u von (NS) genügt der *Serrin-Bedingung*, falls $u \in L^p(\mathbb{R}_+; L^q(\mathbb{R}^n))$ mit

$$\frac{n}{q} + \frac{2}{p} \leq 1.$$

Grenzfall: $q = n$: $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^n(\mathbb{R}^n))$.

Bekannte Resultate: Eindeutigkeit

- Eindeutigkeit für $n = 2, 3$ falls eine Lösung regulär genug, J. Leray, 1933/34.
- Eindeutigkeit für $n = 2$: J. L. Lions, G. Prodi, 1959.
- Serrin-Bedingung mit $q > n$ impliziert Eindeutigkeit, $\mathbb{R}^n$: C. Foias, 1961.
- Serrin-Bedingung mit $q > n$ impliziert Eindeutigkeit, $2 \leq n \leq 4$, Gebiete: J. Serrin, 1963.
- Serrin-Bedingung impliziert Eindeutigkeit:
  - W. von Wahl, 1983,
  - K. Masuda, 1984,
  - H. Sohr, W. von Wahl, 1984,
  - H. Kozono, H. Sohr, 1998.

Eindeutigkeit schwacher Lösungen

- **Fall** $n = 2$: schwache Lösungen sind eindeutig
- **Fall** $n = 3$: Eindeutigkeit in

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^3(\mathbb{R}^3)),$$

aber schwache Lösungen nur in

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)).$$

Eindeutigkeit schwacher Lösungen

- **Fall** $n = 2$: schwache Lösungen sind eindeutig
- **Fall** $n = 3$: Eindeutigkeit in

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^3(\mathbb{R}^3)),$$

aber schwache Lösungen nur in

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)).$$

Weitere Eigenschaften schwacher Lösungen

- Schwache Lösungen $u(t,\cdot)$ in $\mathbb{R}^3$ sind regulär für f.a. $t > 0$: J. Leray, 1934.
- Schwache Lösungen $u(t,\cdot)$ für beschränkte Gebiete in $\mathbb{R}^3$ sind regulär für f.a. $t > 0$: M. Shinbrot, S. Kaniel, 1966.
- Schwache Lösungen $u(t,\cdot)$ für glatte Gebiete in $\mathbb{R}^3$ sind regulär für f.a. $t > 0$: J. G. Heywood, 1988.
- Geeigenete Schwache Lösungen u sind regulär bis auf eine Menge $E \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\Omega = \mathbb{R}^3$ oder Ω beschränkt mit $P_1(E) = 0$,
    - V. Scheffer, 1976,
    - L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, 1982,
    - F. Lin, 1998.