

Lineare Algebra für Physiker I

Gliederung

I. Vektorräume

- Gruppen, (Ringe), Körper
- Beispiele für Vektorräume
- Dimensionsbegriff (Lineare Unabhängigkeit)

II. Skalarprodukte

- euklidischer + unitärer Vektorraum
- orthogonale Projektion
- elementare Quantenmechanik

III. Lineare Abbildungen

- Matrizen
- Transformationsgruppen
- System linearer Gleichungen

0. Motivation

(1) Notation

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$$

ganze Zahlen

\mathbb{Q}

rationale Zahlen

\mathbb{R}

reelle Zahlen

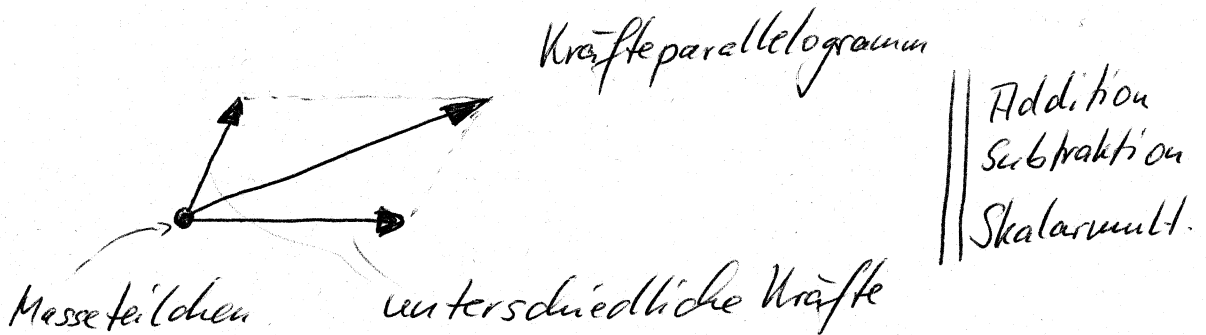
z.B. 3, -3, π , e, $\sqrt{5}$, ...

\mathbb{C}

komplexe Zahlen

z.B. -14, $\pi + 7i$

(2) Vektorrechnung



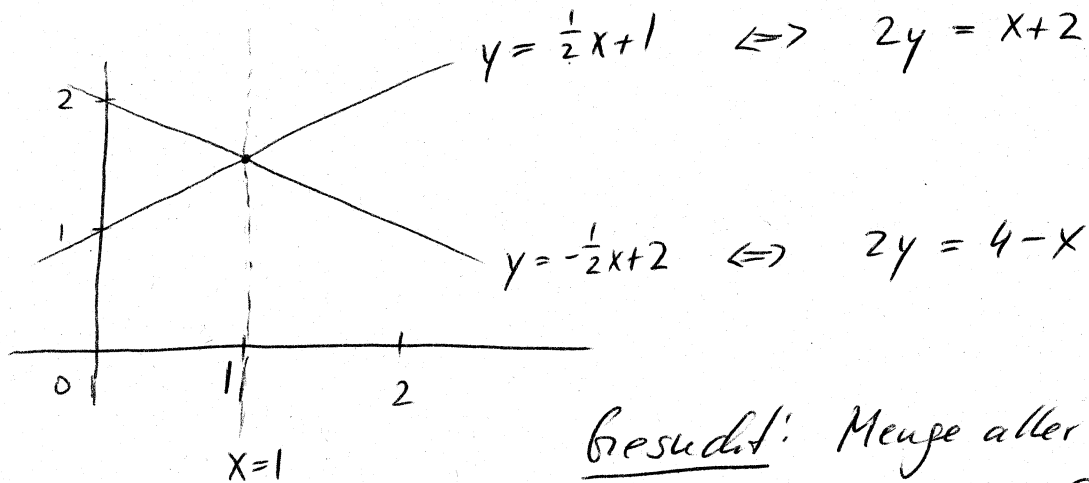
(3) Vektorräume

- math. Konzeption zur Grundlegung der Vektorrechnung
- zwei Abstraktionsrichtungen
 - beliebig viele Dimensionen, nicht nur 1, 2, 3, sogar ∞ -dimensional
 - beliebige Körper als Koordinatenbereiche
Verallg. von $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
(z.B. für Kodierungstheorie oder Kryptographie)

(4) Skalarprodukte

- zusätzlich zur Vektorrechnung:
Winkel zwischen Vektoren und Vektorlängen
- dadurch: Grundlegung der Elementargeometrie

(5) Lineare Gleichungssysteme



Gesucht: Menge aller Lösungen

(x, y) für das lin. GLS

über welcher
Grundgesamtheit?

$$\begin{cases} 2y = x + 2 \\ 2y = 4 - x \end{cases}$$

Elimination von y :

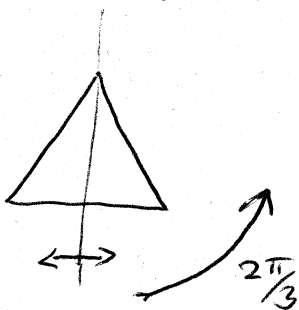
$$4 - x = x + 2 \Leftrightarrow 2 = 2x \Leftrightarrow \underline{\underline{1 = x}}$$

Setze x ein:

$$2y = 1 + 2 = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (1, \frac{3}{2})$$

(6) Symmetriebegriff



Transformationen
(Gruppenbegriff)

A. Exkurs: Quantoren und Aussagenlogik

(1) Die (Aussagen-) Logik handelt von mathematischen Aussagen, die nach gewissen Regeln aus einer gewissen Menge von Symbolen gebildet werden. Eine wohlgeformte Aussage hat entweder den Wahrheitswert "wahr" oder "falsch".

Bsp. Aussagen:

" $0 \in \mathbb{Z}$ ", bzw. "0 ist eine ganze Zahl."

" $2+2=5$ "

" $a+a=2a$ gilt für alle natürlichen Zahlen a ."

Bem. Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, hängt vom axiomatischen Kontext ab.

(2) Aus bereits vorhandenen Aussagen A, B lassen sich wie folgt neue Aussagen bilden:

$\neg A$ ist wahr genau dann, wenn A falsch ist,
lies "nicht A "; Negation

$A \wedge B$ ist wahr gdw. A und B beide wahr sind,
lies " A und B "; Konjunktion

$A \vee B$ ist wahr gdw. mindestens A oder B wahr ist,
lies " A oder B "; Disjunktion

$A \Rightarrow B$ ist definiert als $(\neg A) \vee B$,
lies "aus A folgt B "; Subjunktion

$A \Leftrightarrow B$ ist wahr gdw. die Wahrheitswerte von A und B gleich sind (d.h. beide wahr oder beide falsch).
lies " A ist äquivalent zu B "; Äquivalenz

Diese Konstruktionen neuer Aussagen aus bestehenden lässt sich durch die folgende Wahrheitstafel zusammenfassen:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

(3) Durch Inspektion aller möglichen Wahrheitsbelegungen lassen sich die folgenden Sätze der Aussagenlogik beweisen:

$$a) \neg(\neg A) \Leftrightarrow A$$

$$b) \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

De Morganschen Regeln

$$c) (A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$$

Kommutativität

$$d) (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

Assoziativität

$$e) A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Distributivgesetze

(4) Zusätzlich gelten die Regeln des logischen Schließens, die man ebenfalls durch Inspektion der Wahrheitstafel verifizieren kann:

$$a) [A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$$

direkter Schluss

$$b) [(\neg B) \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow \neg A$$

indirekter Schluss

Beweis:

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$(\neg B) \wedge (A \Rightarrow B)$	$\neg A$	$[(\neg B) \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow \neg A$
w	w	f	w	f	f	w
w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

□

c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontraposition

(5) Bsp:

$$\begin{aligned} \text{a) } [A \Rightarrow (B \vee C)] &\Leftrightarrow [\neg A \vee (B \vee C)] \\ &\Leftrightarrow [(\neg A \vee B) \vee C] \\ &\Leftrightarrow [\neg(\neg A \vee B) \Rightarrow C] \\ &\Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \Rightarrow C] \end{aligned}$$

b) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\underbrace{p \cdot q = 0}_A \Rightarrow \underbrace{p = 0}_B \quad \text{oder} \quad \underbrace{q = 0}_C$$

Bew: Angenommen $\underbrace{p \cdot q = 0}_A$ und $\underbrace{p \neq 0}_{\neg B}$ $\xrightarrow{z.z.}$ $\underbrace{q = 0}_C$

$$\Rightarrow q = 1 \cdot q = \left(\frac{1}{p} \cdot p\right) q = \frac{1}{p} \cdot (pq) = \frac{1}{p} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{q = 0}_C$$

□

(6) Quantoren

Sei J eine Menge und $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie von Aussagen.

Def: a) $(\forall j \in J) p_j$ ist eine Aussage, die wahr ist genau dann, wenn die Aussage p_j wahr ist für jedes $j \in J$.

lies: "für alle $j \in J$ " Allquantor

b) $(\exists j \in J) p_j$ ist eine Aussage, die wahr ist genau dann, wenn es (mindestens) ein $j \in J$ gibt, so dass p_j wahr ist.

lies: "es existiert ein $j \in J$ " Existenzquantor

c) $(\exists! j \in J) p_j$ ist eine Aussage, die wahr ist genau dann, wenn es genau ein $j \in J$ gibt, so dass p_j wahr ist (d.h. für alle anderen $j' \in J \setminus \{j\}$ ist $p_{j'}$ falsch).

Quantor zur eindeutigen Existenz

Bsp: $[\forall q \in \mathbb{Q} \exists r \in \mathbb{Q} : 2r = q]$ ist wahr
 $[\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 5]$ ist falsch

I Vektorräume

§ 1 Gruppen, Ringe, Körper

(1) Def. Eine (binäre) Verknüpfung auf einer Menge M ist eine Abbildung $*$: $M \times M \rightarrow M$:
 $(m, m') \mapsto m * m'$.

Bem. Je nach Verknüpfung $*$ sind unterschiedliche Schreibweisen für das Bild $m * m'$ unter $*$ üblich.

Bsp. a) $M = \mathbb{Z}$, $*$ = + Addition

b) $M = \mathbb{R}$, $*$ = \cdot Multiplikation

Def. Zu einer Menge M bezeichnet $\mathcal{P}(M) = \{M' \mid M' \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M .

Bsp. c) Für $M', M'' \subseteq M$ sei $M' - M'' = \{m \mid m \in M', m \notin M''\}$ die Differenzmenge.

Die Abbildung $-$: $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$

$$(M', M'') \mapsto M' - M''$$

ist eine Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$.

Def. Seien A, B beliebige Mengen. Dann bezeichnet $A^B = \{f \mid f: B \rightarrow A\}$ die Menge aller Abbildungen von B nach A .

Bsp. d) Sei nun M wieder eine beliebige Menge. Die Verkettung von Abbildungen von M in sich ist definiert durch \circ : $M^M \times M^M \rightarrow M^M$ mit
 $f \circ g: M \rightarrow M, m \mapsto g(f(m)).$

(2) Def: Eine Verknüpfung $*$: $M \times M \rightarrow M$ heißt

• kommutativ, falls für alle $m, m' \in M$ gilt:
 $m * m' = m' * m$.

• assoziativ, falls für alle $m, m', m'' \in M$ gilt:

$$(m * m') * m'' = m * (m' * m'')$$

In diesem Fall ist es nicht nötig, Klammern zu setzen, und das Paar $(M, *)$ heißt Halbgruppe.

Proposition: Für eine beliebige Menge M ist das Paar (M^M, \circ) eine Halbgruppe.

Bew: z.z.: Die Verkettung \circ ist assoziativ:

Seien $f, g, h \in M^M$ und $m \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [(f \circ g) \circ h](m) &= h((f \circ g)(m)) \\ &= h(g(f(m))) \\ &= g \circ h(f(m)) \\ &= [f \circ (g \circ h)](m). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

□

(3) Def: Eine Halbgruppe $(G, *)$ heißt Gruppe, falls gilt:

i) $\exists e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt $e * g = g$,
und

ii) zu jedem $g \in G \exists$ ein $h \in G$, so dass $h * g = e$.

Bem: Man kann zeigen, dass in einer Gruppe genau ein Element e mit der Eigenschaft i) existiert. Dies heißt das Neutralelement von G .

Ebenso existiert zu jedem $g \in G$ genau ein $h \in G$ mit der Eigenschaft ii). Dieses Element heißt das zu g inverse und wird oft mit g^{-1} bezeichnet.

Bsp: a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe. Das Neutralelement ist 0, das zu $a \in \mathbb{Z}$ inverse ist $-a$.

b) $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Gruppe. Außerdem ist $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ auch eine Gruppe. In diesem zweiten Fall ist das Neutralelement 1, und das zu $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverse ist $\frac{1}{x}$.

c) Sei E eine Menge mit genau einem Element $e \in E$. Dann ist $(E, *)$ eine Gruppe für $*: (e, e) \mapsto e$. Wir nennen $(E, *)$ eine triviale Gruppe.

d) Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Durch die folgende Tafel sei eine Verknüpfung $+$: $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ definiert:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Dann ist $(\mathbb{F}_2, +)$ eine Gruppe mit dem Neutralelement 0.

e) Sei M eine beliebige Menge und

$$\text{Sym}(M) = \{f \mid f: M \rightarrow M \text{ bijektiv}\}.$$

Dann ist $(\text{Sym}(M), \circ)$ eine Gruppe mit dem Neutralelement $\text{id}_M: M \rightarrow M, m \mapsto m$.

Bew: Die Verkettung \circ ist eine Verknüpfung auf $\text{Sym}(M)$, weil die Verkettung von bijektiven Abbildungen bijektiv ist.

- ii) Aus Prop. (2) folgt, dass $(\text{sym}(M), \circ)$ eine Halbgruppe ist.
- iii) Sei $f: M \rightarrow M$ eine beliebige bijektive Abb., und $m \in M$.
- Es gilt $(\text{id}_M \circ f)(m) = f(\text{id}_M(m)) = f(m)$, also $\text{id}_M \circ f = f$.
 - Da f bijektiv ist, existiert die Umkehrabb. $f^{-1}: M \rightarrow M$ (und diese ist ebenfalls bijektiv). Es gilt $(f^{-1} \circ f)(m) = f^{-1}(f(m)) = m = \text{id}_M(m)$, also $f^{-1} \circ f = \text{id}_M$.

□

(4) Def. Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$: $R \times R \rightarrow R$ und \cdot : $R \times R \rightarrow R$. Das Tripel $(R, +, \cdot)$ heißt Ring, falls gilt:

- $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
- (R, \cdot) ist eine Halbgruppe.
- Es ist $(a+b)c = ac+bc$
 $a(b+c) = ab+ac$
für alle $a, b, c \in R$.

Distributivgesetze

Bsp: a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring.

b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Ringe.

(5) Def. Ein Ring $(K, +, \cdot)$ mit additivem Neutralelement $0 \in K$ heißt Körper, falls $(K - \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.

Das additive Neutralelement 0 heißt Null-element, und das multiplikative Neutralelement heißt Einselement.

Bem: Man kann für die lineare Algebra, die Körper wesentlich als Koordinatenbereiche benötigt, weitgehend auf die Kommutativität der Multiplikation verzichten; dies führt zur linearen Algebra über Schiefkörpern

Bsp: a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper

b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

c) Wenn man auf der Menge $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ aus Bsp 3d) die triviale Multiplikation \cdot betrachtet, so ist $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper mit genau zwei Elementen.

Es ist definiert $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$.

Nachtrag: Anders als zunächst in 1.1.d) definiert, wollen wir die Verketzung zweier Abbildungen

$f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ nun als

$g \circ f: A \rightarrow C$, $a \mapsto g(f(a))$

definieren.

§ 2 Vektorräume

(1) Def. Sei K ein Körper. Ein K -Vektorraum (oder Vektorraum über K) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V , einer binären Verknüpfung (Addition) $+: V \times V \rightarrow V$ sowie einer Skalarmultiplikation $\cdot: K \times V \rightarrow V$, so dass gilt

a) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe

b) $\forall v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in K$ gilt:

i) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

ii) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$

iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$

iv) $1 \cdot v = v$

(2) Bsp. Der Standardvektorraum K^n für $n \in \mathbb{N}$

a) $\cdot K^n = \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ mal}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in K \right\}$

$$\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Add. in } K \\ \text{komponentenweise} \\ \text{Addition} \end{array}$$

$$\cdot \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Mult. in } K \\ \lambda, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in K \end{array}$$

Wir verifizieren die Axiome 1.a und 1.b:

1.a) Der Nullvektor $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist wegen

$$0 + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 0 \quad \text{als Neutralelement für Vektoraddition.}$$

Das zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ additive Inverse ist $-\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

$$\text{wegen } \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ \vdots \\ -x_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Da die Addition in K kommutativ ist, ist auch die Addition in K^n kommutativ.

1.b) Seien $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in K^n$ beliebig mit

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}. \text{ Dann gilt}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } (\lambda + \mu) \cdot v &= (\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n + \mu v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \vdots \\ \mu v_n \end{pmatrix} = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v) \end{aligned}$$

ii), iii), iv) analog beweisbar.

b) Sei M eine beliebige Menge und K ein beliebiger Körper.

$$\text{Es ist } K^M = \{ f \mid f: M \rightarrow K \}.$$

Mit der punktweise definierten Addition:

$$f + g: M \rightarrow K, \quad m \mapsto f(m) + g(m) \quad \text{Add. in } K$$

$$\text{und der Skalarmultiplikation } \lambda \cdot f: M \rightarrow K, \quad m \mapsto \lambda \cdot f(m) \quad \text{Mult. in } K$$

ist $(K^M, +, \cdot)$ ein Vektorraum.

c) Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ wird ein \mathbb{Q} -Vektorraum, wenn man die gewöhnlichen arithmetischen Operationen betrachtet, aber als Skalarmultiplikation nur die Multiplikation von rationalen mit reellen Zahlen betrachtet.

(3) Es gelten die folgenden Rechenregeln für einen beliebigen K -Vektorraum $(V, +, \cdot)$:

a) $\overset{\text{Skalar}}{0} \cdot \overset{\text{Vektor}}{v} = \overset{\text{Vektor}}{0}$ für alle $v \in V$

Bew: $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$
 \parallel
 $0 + 0 \cdot v$

$\Rightarrow 0 = 0 \cdot v$ (Add von $-(0 \cdot v)$)

b) $\overset{\text{Skalar}}{\lambda} \cdot \overset{\text{Vektor}}{0} = \overset{\text{Vektor}}{0}$

Bew: (analog zu a):

$0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda(0+0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$

$\Rightarrow 0 = \lambda \cdot 0$

c) $\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = 0$ für alle $\lambda \in K, v \in V$

Bew: Angenommen $\lambda \cdot v = 0$ und $\lambda \neq 0$.

$\Rightarrow v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = \lambda^{-1} (\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$

d) $(-1) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$

Bew: $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$

$\Rightarrow (-1) \cdot v = -v$ (da $(-1) \cdot v$ add. Inverses zu v , das mit $-v$ bezeichnet wird)

endliche Familie
oder

(4) Es sei (v_1, \dots, v_k) ein geordnetes k -Tupel von Vektoren aus einem K -VR V .

a) Ein Vektor $v \in V$ heißt

- Linearkombination von (v_1, \dots, v_k) , falls ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$, so dass gilt

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

- Affinkombination von (v_1, \dots, v_k) , falls ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$, so dass gilt

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

und $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$.

b) Def: Speziell für $K = \mathbb{R}$ (oder allgemeiner einen angeordneten Körper K) heißt eine Affinkomb.

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

eine Konvexkombination, falls zusätzlich

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq k.$$

c) Def: Das k -Tupel (v_1, \dots, v_k) heißt linear unabhängig, falls gilt:

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in K^k: \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Ansonsten heißt (v_1, \dots, v_k) linear abhängig.

d) Lemma: Sei (v_1, \dots, v_k) linear unabhängig.

i) Für jede Permutation $\pi \in \text{Sym}(\{1, \dots, k\})$ ist auch $(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})$ linear unabhängig.

ii) Jede Teilfamilie (v_1, \dots, v_i) für $i \leq k$ ist linear unabhängig.

Bew: i) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit

$$0 = \lambda_1 v_{\pi(1)} + \dots + \lambda_k v_{\pi(k)}$$

$$= \lambda_{\pi^{-1}(1)} v_1 + \dots + \lambda_{\pi^{-1}(k)} v_k \quad (\text{Vertauschung der Summanden})$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pi^{-1}(1)} = \dots = \lambda_{\pi^{-1}(k)} = 0, \text{ da } (v_1, \dots, v_k) \text{ lin. unabh.}$$

$$\Rightarrow (v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \text{ lin. unabh.}$$

ii) Angen. (v_1, \dots, v_i) wäre lin. abh. für ein $i \leq k$.

Dann ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_i \in K$ und $\lambda_h \neq 0$ für mind. ein $1 \leq h \leq i$, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_k = 0$$

mit $\lambda_h \neq 0$

$$\Rightarrow (v_1, \dots, v_k) \text{ lin. abh.} \Rightarrow \text{Wid. zur Vor.}$$

e) Bsp.

i) Im Standard- K -VR K^n sind die Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig.

ii) V bel. K -VR, $x \in V, x \neq 0$

$\Rightarrow (x)$ linear unabh., aber

$(\underbrace{x, x, \dots, x}_{k\text{-fad}}, k \geq 0)$ linear abh.

$k\text{-fad}, k \geq 0$

* Def. Eine unendliche Familie von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist

Bem. Wegen Lemma i) lässt sich der Begriff der linearen (Un-)Abhängigkeit auch auf Mengen (= ungeordnete Tupel) von Vektoren anwenden. Der Nullvektor $0 \in V$ ist lin. abh.

g) Proposition: Für $n \geq 2$ sind v_1, \dots, v_n genau dann linear abhängig, falls einer dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist.

Bew: Gilt $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ mit $\lambda_i \neq 0$, so folgt

$$v_i = \sum_{j \neq i} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_j.$$

Ist umgekehrt z.B. $v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$, so folgt

$$(-1) \cdot v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n = 0.$$

□

(5) a) Sei V ein K -Vektorraum

Def: Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Teilraum (oder Unterraum) von V , falls gilt $\forall \lambda, \mu \in K \forall u, v \in U$.

$$\lambda u + \mu v \in U.$$

Bew: Wegen $U \neq \emptyset$ ex. $u \in U \Rightarrow 0 \cdot u = 0 \in U$.

• Falls U Unterraum von V , so schreiben wir $U \leq V$.

b) Bsp: i) $\{0\} \leq V$, $V \leq V$

ii) Die Lösungen $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ des homog. lin. Gleichungssystems

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0$$

bilden einen Teilraum von K^n

iii) Betrachte den \mathbb{R} -VR $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} mit punktweise def. Addition (vgl. Bsp 2b)

Dann bilden

- die stetigen Abb. $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ einen Teilraum
- die differenzierbaren Abb. einen Teilraum

iv) Betrachte die Lösungen $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$
 der Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = a(t) \cdot u(t)$$

↑
einmal stetig
diffbar

für $a(t) \in \mathcal{C}([0,1])$.

Dann gilt $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und \forall Lösungen u, v ,
 dass wegen

$$\begin{aligned} a(t)(\lambda u(t) + \mu v(t)) &= \lambda a(t)u(t) + \mu a(t)v(t) \\ &= \lambda \dot{u}(t) + \mu \dot{v}(t) \\ &= \dot{(\lambda u + \mu v)}(t) \\ &= (\lambda u + \mu v)'(t) \end{aligned}$$

die Funktion ~~u~~ $\lambda u + \mu v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ wieder
 eine Lösung ist. D.h. die Lösungsmenge
 bildet einen Teilraum von $\mathcal{C}^1([0,1])$.

c) Proposition: Seien U, W Teilräume des K -VR V .

Dann sind $U \cap W$ und

$$U+W := \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$$

Unterraum-
summe

Unterräume von V .

Bew: i) z.z. $U \cap W \leq V$

Seien $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in U \cap W$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in U \text{ und } \lambda x + \mu y \in W$$

$U \leq V$
 $W \leq V$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in U \cap W, \text{ d.h. } U \cap W \leq V. \quad \downarrow$$

ii) z.z. $U+W \leq V$

Seien $\lambda, \mu \in K$ und $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U+W$

$$\Rightarrow \lambda(u_1 + w_1) + \mu(u_2 + w_2) =$$

$$\underbrace{\lambda u_1 + \mu u_2}_{\in U} + \underbrace{\lambda w_1 + \mu w_2}_{\in W} \in U+W. \quad \downarrow$$

d) Def. Sei V ein K -VR und $M \subseteq V$. Die Menge

$$\text{Lin}(M) := \{ \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n \mid \lambda_i \in K, m_i \in M \}$$

heißt lineare Hülle (oder linearer Aufspann)

von M in V . Falls $M = \emptyset$, setzen wir $\text{Lin}(M) = \{0\}$.

M heißt Erzeugendensystem von $\text{Lin}(M)$.

Später: Falls M inklusionsminimal \rightarrow Basis von $\text{Lin}(M)$.

Proposition: $\text{Lin}(M)$ ist der kleinste Unterraum von V , der M enthält.

Bew: i) z.z. $\text{Lin}(M) \subseteq V$ o.B.d.A $M \neq \emptyset$

Γ Seien $\lambda, \mu \in K$ und $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n \in \text{Lin}(M)$
und $\lambda'_1 m'_1 + \dots + \lambda'_n m'_n \in \text{Lin}(M)$

$$\Rightarrow \lambda (\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n) + \mu (\lambda'_1 m'_1 + \dots + \lambda'_n m'_n)$$

$$= \lambda \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda \lambda_n m_n + \mu \lambda'_1 m'_1 + \dots + \mu \lambda'_n m'_n \in \text{Lin}(M) \quad \perp$$

ii) z.z. $\forall U \subseteq V$ mit $M \subseteq U$ gilt $\text{Lin}(M) \subseteq U$.

Γ Sei $U \subseteq V$ mit $M \subseteq U$. Wähle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $m_1, \dots, m_n \in M$.

Wir zeigen $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n \in U$ durch Induktion nach n : $U \subseteq V$

Aufang: $n=1$: $\lambda_1 m_1 \stackrel{!}{=} \lambda_1 m_1 + 0 \cdot m_1 \stackrel{\triangleright}{\in} U$

Vor: $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_{n-1} m_{n-1} \in U$

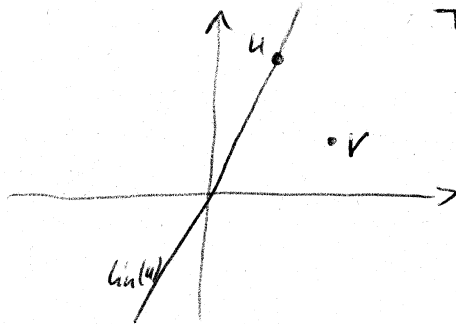
$$\Rightarrow \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n = 1 \cdot (\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_{n-1} m_{n-1}) + \lambda_n m_n \in U \quad \perp$$

e) Wie sehen die Unterräume des Standard-VR \mathbb{R}^2 aus?

i) $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

ii) Sei $u \in \mathbb{R}^2$ mit $u \neq 0$ und $u \in U$.

$\Rightarrow \text{lin}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq U$



Falls ex. $v \in U \setminus \text{lin}(u)$,
dann gilt $U = \mathbb{R}^2$:

Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Wegen $v \notin \text{lin}(u)$ ist

$u_1 v_2 - v_1 u_2 \neq 0 \dots$

(Sowst gilt $u_1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 - u_1 v_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \neq 0 \end{pmatrix}$,
aber $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sind lin. unabhängig.)

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$\Rightarrow (v_2 x_1 - v_1 x_2) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (u_1 x_2 - u_2 x_1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} u_1 v_2 x_1 - u_1 v_1 x_2 \\ u_2 v_2 x_1 - u_2 v_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 v_1 x_2 - u_2 v_1 x_1 \\ u_1 v_2 x_2 - u_2 v_2 x_1 \end{pmatrix}$

$= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \text{lin}(\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\text{lin}(\{u,v\})})$

(6) Wie testet man lineare (lin-) Abhängigkeit?

Bsp: Betrachte $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

Dann gilt: (u, v, w) lin. abhängig

$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : \lambda u + \mu v + \nu w = 0$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}:$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda + 3\nu &= 0 \\ \mu - \nu &= 0 \\ -\lambda + \mu - 4\nu &= 0 \\ -2\mu + 2\nu &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

D.h. die Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn das homogene GLS (*) eine nicht-triviale Lösung hat: $(-3, 1, 1)$ löst (*)

$$\Rightarrow -3u + v + w = 0$$

$\Rightarrow (u, v, w)$ sind lin. abhängig.

(7) a) Sei V ein K -VR.

Def.: Eine Menge $M \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem von V , falls $\text{lin}(M) = V$.

• Eine Familie in V heißt Basis, falls sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bildet.

b) Bsp. i) Im Standard K -VR K^n ist die Familie (e_1, \dots, e_n) eine Basis, die Standardbasis von K^n .

ii) [vgl. (6)] Betrachte den UR $U = \text{lin}(u, v, w) \subseteq \mathbb{R}^4$.

Dann ist (u, v) eine Basis von U :

Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ \mu \\ -2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \mu - \lambda \\ -2\mu \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \lambda = \mu = 0 \Rightarrow (u, v)$ lin. unabh.

Außerdem ist $w = 3u - v$, d.h. $w \in \text{lin}(u, v)$

$\Rightarrow U = \text{lin}(u, v)$

iii) $(1, i)$ ist eine Basis des \mathbb{R} -VR \mathbb{C} .

c) Def: Ein VR V heißt endlich erzeugt, falls er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

(8) a) Satz: Sei $V \neq \{0\}$ ein K -VR und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

i) $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von V

ii) $(v_i)_{i \in I}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem von V , d.h. $\forall J \subsetneq I$ ist $(v_j)_{j \in J}$ kein Erzeugendensystem von V

iii) $(v_i)_{i \in I}$ ist eine unverlängerbare linear unabh. Familie, d.h. $\forall J' \supsetneq I$ ist $(v_j)_{j \in J'}$ lin. abh.

iv) (v_i) ist ein Erzeugendensystem von V , aus dem sich jeder Vektor von V eindeutig linear kombinieren lässt.

b) Folgerung: (Basisauswahlsatz)

Sei V ein K -VR und v_1, \dots, v_n ein (endliches) Erzeugendensystem von V . Dann existiert eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, so dass $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V ist.

Bew: folgt aus a) i) \Leftrightarrow ii)

Bem: Insbesondere besitzt jeder endlich erzeugte VR eine Basis.

Es gilt: Jeder VR besitzt eine Basis.

Der Beweis nutzt das Auswahlaxiom.

(9) a) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} (*)$$

über K . D. h. $a_{ij} \in K, b_i \in K$, und gesucht sind Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$.

Fragen: i) Gibt es Lösungen?

ii) Falls ja: Ist die Lösung eindeutig?

iii) Falls nein: Beschreibe alle Lösungen.

iv) Gibt es einen Algorithmus?

b) Def: Das lin. GLS (*) heißt homogen, falls $b_1 = \dots = b_m = 0$. Andernfalls heißt (*) inhomogen.

Ben: Aus 5bii) wissen wir, dass die Lösungsmenge eines homogenen lin. GLS ein Unterraum von K^n ist.

Frage a.iii): Bestimmen Sie eine Basis!
(homog. Fall)

~~Spezialfälle~~ von (*)

i) $m=n=1$ } Übung

ii) $m=1, n=2$

c) Der Gauß-Jordan-Eliminationsalgorithmus
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
Camille Jordan (1838-1922)

Beobachtung

Die Lösungsmenge des lin. GLS (*) ändert sich nicht unter den folgenden elementaren Zeilenumformungen:

- (E1) Addiere zu einer Gleichung das λ -fache einer anderen Gleichung.
- (E2) Tausche zwei Gleichungen.
- (E3) Multipliziere eine Gleichung mit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Algorithmus

[1]. Falls $a_{11} \neq 0$, subtrahiere das

$\frac{a_{21}}{a_{11}}$ -fache der 1. Gleichung von der 2.

$\frac{a_{31}}{a_{11}}$ -fache der 1. Gleichung von der 3.

...

$\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ -fache der 1. Gleichung von der m -ten

- Falls $a_{11} = 0$, so finde $a_{i1} \neq 0$ und vertausche die 1. Gleichung mit der i -ten.
- Falls kein solches a_{i1} existiert (d.h. die gesamte 1. Spalte $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{m1} = 0$), so tue nichts. Danach sieht das modifizierte GLS so aus

$$a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1$$

$$a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2$$

...

$$a'_{m2} x_2 + \dots + a'_{mn} x_n = b'_m$$

[2] Die unteren $m-1$ Gleichungen des modifizierten GLS können nun wie im Schritt [1] behandelt werden.

[un-] usw.

Nach $m-1$ Schritten hat das dann entstandene lineare GLS die folgende Zeilenstufenform:

$$\left. \begin{array}{l} c_{1j_1} x_{j_1} + \dots + c_{1n} x_n = d_1 \\ c_{2j_2} x_{j_2} + \dots + c_{2n} x_n = d_2 \\ \vdots \\ c_{rj_r} x_{j_r} + c_{rn} x_n = d_r \\ 0 = d_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = d_m \end{array} \right\} (**)$$

x_{j_k} Pivotvariablen

Dabei gilt $\forall k \in \{1, \dots, r\}: c_{k j_k} \neq 0$ und $j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$, sowie $0 \leq r \leq m$.

Def: Die Zahl r heißt Rang von (**).

Wie bestimmt man die Lösungsmenge L des GLS (**) (und damit die von (*))?

Fall 1: $d_{r+1} \neq 0$ oder ... oder $d_m \neq 0$

$$\Rightarrow L = \emptyset$$

Fall 2: $d_{r+1} = \dots = d_m = 0$

i) Wähle beliebige Werte aus K für jedes der $n-r$ Nicht-Pivotvariablen

ii) Löse danach die r -te Gleichung auf.

$$x_{j_r} = c_{j_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{j_r, r+1} x_{r+1} - \dots - c_{j_r, n} x_n)$$

Danach die $(r-1)$ -te Gleichung usw.

iii) $|L| = 1 \Leftrightarrow r = n$ und $d_{r+1} = \dots = d_m = 0$

d) Bsp i) LGS über \mathbb{R} mit $m=4$ und $n=3$, ohne Lsg.

ii) LGS über \mathbb{R} mit $m=n=3$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$2x_1 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 = 1$$

$$-2x_2 - 3x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 = 1$$

$$-7x_3 = 4$$

Zeilenstufenform

$$x_3 = -\frac{4}{7}$$

$$x_2 = 1 + 2 \cdot x_3 = 1 - \frac{8}{7} = -\frac{1}{7}$$

$$x_1 = 0 - x_2 - 2x_3 = \frac{1}{7} + \frac{8}{7} = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{eindeutige Lsg.}$$

iii) HA: Löse ii) über \mathbb{F}_3 !

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} + & 0 & 1 & 2 & \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{"-1"} = 2$$

$$\text{"-2"} = 1$$

e) Der homogene Fall

Im homogenen Fall sind sämtliche $d_k = 0$,
und falls $r < n$, so können wir $n-r$ verschiedene
Lsg. ~~...~~ b_1, \dots, b_{n-r} wie folgt konstruieren:

b_k entsteht wie unter d) erläutert, wobei
man für die k -te Nicht-Pivotvariable 1
und für die übrigen 0 wählt und an-
schließend die Werte für die Pivotvariablen
ausrechnet.

Proposition: (b_1, \dots, b_{n-r}) ist eine Basis des
Lösungsraums.

Bew: $(\bar{u}A)$

Bsp: $n=4, m=3, K=\mathbb{C}$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_2 + 3ix_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + (1+3i)x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_2 + 3ix_3 = 0$$

$$2x_2 + 3ix_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_2 + 3ix_3 = 0$$

$$0 = 0$$

Nicht-Pivotvariablen:

x_3, x_4

Basis Lsg: $b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ analog $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 2b_{12} &= -3ix_3 \\ \Rightarrow b_{12} &= -\frac{3}{2}i \\ b_{11} &= -b_{12}x_3 - x_4 = -\frac{3}{2}i \Rightarrow b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}i \\ -\frac{3}{2}i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(10) Sei V ein K -VR, der endlich erzeugt ist.

a) Austauschlemma

Sei (v_1, \dots, v_r) eine Basis von V und

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in V.$$

Ist $k \in \{1, \dots, r\}$ mit $\lambda_k \neq 0$, dann ist

$$(v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r)$$

wieder eine Basis von V .

b) Austauschsatz

Sei (v_1, \dots, v_r) eine Basis von V , und sei

(w_1, \dots, w_n) eine linear unabhängige Menge.

Dann gilt $n \leq r$ und es gibt Indizes

$i_1, \dots, i_{r-n} \in \{1, \dots, r\}$, so dass

$$(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{r-n}})$$

wieder eine Basis von V ist

c) Folgerung

Jede Basis von V ist endlich.

Bew: V endlich erzeugt $\Rightarrow \exists$ endliche Basis (v_1, \dots, v_r)

Angenommen, es ex. zweite Basis, die unendlich ist. $\Rightarrow \exists$ linear unabh. Familie (w_1, \dots, w_{r+1})

\wedge zu Austauschsatz. //

d) Folgerung

Jede Basis von V hat dieselbe Länge.

Bew: (v_1, \dots, v_r) und (w_1, \dots, w_n) zwei Basen.

Austauschsatz: $n \leq r$ und $r \leq n$

$$\Rightarrow r = n. //$$

e) Folgerung

Jede linear unabhängige Familie in V lässt sich zu einer Basis fortsetzen.

Bew: folgt aus b)

(11) a) Def: Ist V ein K -VR, so bezeichnet

$$\dim_K V := \begin{cases} r, & \text{falls } V \text{ eine Basis der Länge} \\ & r \text{ besitzt,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Dimension von V über K

b) i) $\dim_K K^n = n$

ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

iii) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ (ohne Bew.)

iv) $\dim_K 0 = 0$

c) Proposition

Sei V ein K -VR mit $\dim V < \infty$ und $U \subset V$ ein echter Teilraum.

Dann gilt $\dim_K U < \dim_K V$.

Bew: Sei (u_1, \dots, u_k) Basis von U und
 (v_1, \dots, v_n) Basis von V .

Da $U \subsetneq V$, $\exists v \in V \setminus U$ und damit
 $v \notin \text{lin}(u_1, \dots, u_k)$.

$\Rightarrow (u_1, \dots, u_k, v)$ linear unabh.
4.9)

$\Rightarrow k+1 \leq n$
10.6) //

§3 Lineare Abbildungen

(1) Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K

a) Def: Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt linear, falls gilt

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

für alle $u, v \in V$, $\lambda, \mu \in K$.

b) Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung

Def: Die Menge

$$\text{Im } f = \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$

heißt Bild von f .

• Die Menge

$$\text{Ker } f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$$

heißt Kern von f .

$$\boxed{0 \in \text{Ker } f}$$

c) Bsp: Sei V beliebig und $v_1, \dots, v_n \in V$.

Dann ist die Abbildung

$$f: K^n \rightarrow V: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

linear. Es gilt

$$\text{Im } f = \text{lin}(v_1, \dots, v_n)$$

und

$$\text{Ker } f = \{x \in K^n \mid x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0\}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f = 0 \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \text{ lin. unabh.}$$

d) Proposition Eine lin. Abb. $f: V \rightarrow W$ ist injektiv genau dann, wenn $\text{Ker } f = 0$ ist.
 Außerdem gilt $\forall u, v \in V$:

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u - v \in \text{Ker } f.$$

Bew: Seien $u, v \in V$:

$$0 = f(u) - f(v) \stackrel{\substack{\uparrow \\ f \text{ linear}}}{=} f(u-v) \Leftrightarrow u-v \in \text{Ker } f.$$

Sei $f: V \rightarrow W$ injektiv. z.z.: $\text{Ker } f = \{0\}$

$$\begin{aligned} \lceil \text{Sei } x \in \text{Ker } f &\Rightarrow f(x) = 0 = f(0) \\ &\Rightarrow x = 0 \\ &\quad \substack{\uparrow \\ f \text{ injektiv}} \end{aligned}$$

Sei $\text{Ker } f = \{0\}$. z.z. f injektiv

$$\begin{aligned} \lceil \text{Seien } u, v \in V \text{ mit } f(u) &= f(v). \\ &\Rightarrow u - v \in \text{Ker } f = \{0\} \\ &\Rightarrow u = v. \end{aligned}$$

(2) Für das folgende erweitern wir die Addition von \mathbb{N} auf $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ durch

$$u + \infty := \infty =: \infty + u \quad \forall u \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

a) Satz: Sei $f: V \rightarrow W$ linear. Dann gilt

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V.$$

Bew: Falls $\dim V = \infty$, so ist zu zeigen [Dimensions-
formel]
 $\dim \text{Ker } f = \infty$ oder $\dim \text{Im } f = \infty$.

O.B.d.A sei

$$\dim \text{Ker } f \in \mathbb{N} \text{ und } \dim \text{Im } f \in \mathbb{N}$$

[Falls $\dim V = \infty$ folgt die Beh. durch Kontraposition.]

Sei $k = \dim \text{Ker } f$ und $l = \dim \text{Im } f$.

D.h., es ex. Basen (v_1, \dots, v_k) von $\text{Ker } f$ und (w_1, \dots, w_l) von $\text{Im } f$.

Für alle $j = 1, \dots, l$ ex. $v_{k+j} \in V$ mit $f(v_{k+j}) = w_j$.

Z.Z. (v_1, \dots, v_{k+l}) ist Basis von V

i) (v_1, \dots, v_{k+l}) erzeugt V :

Sei $v \in V \Rightarrow \exists \mu_1, \dots, \mu_e$ mit

$$\begin{aligned} f(v) &= \mu_1 w_1 + \dots + \mu_e w_e \\ &= \mu_1 f(v_{k+1}) + \dots + \mu_e f(v_{k+l}) \\ &= f(\mu_1 v_{k+1} + \dots + \mu_e v_{k+l}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v - \mu_1 v_{k+1} - \dots - \mu_e v_{k+l} \in \text{Ker } f = \text{Lin}(v_1, \dots, v_k)$$

" $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$.

ii) (v_1, \dots, v_{k+l}) linear unabh.

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+l} \in K$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k+l} v_{k+l} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{k+l} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k+l} \lambda_i f(v_i)$$

$$= \lambda_{k+1} w_1 + \dots + \lambda_{k+l} w_l$$

$$\stackrel{(w_1, \dots, w_l) \text{ Basis}}{\implies} \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+l} = 0$$

$$\stackrel{(v_1, \dots, v_k) \text{ Basis}}{\implies} \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \quad \left(\text{da } \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0\right)$$

□

b) Satz Sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abb. und $\dim V < \infty$.

Äquivalent sind:

- i) f ist injektiv.
- ii) f ist surjektiv.
- iii) f ist bijektiv.

Bew: Sei $n = \dim V$.

$$\Rightarrow \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$$

$$\Rightarrow f \text{ injektiv} \stackrel{1, d)}{\Leftrightarrow} \text{Ker } f = \{0\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 0$$

$$\stackrel{a)}{\Leftrightarrow} \dim \text{Im } f = n \stackrel{2, II, c)}{\Leftrightarrow} \text{Im } f = V$$

$$\Leftrightarrow f \text{ surjektiv.}$$

□

Bem: Für ∞ -dimensionale VR existieren stets injektive ^{lin.} Abb., die nicht surjektiv sind und surjektive lin. Abb., die nicht injektiv sind.

$\rightarrow \text{UA}$

c) Sei $f: V \rightarrow W$ linear

Def: $\text{rank}_K f = \dim_K f(V) = \dim_K \text{Im } f$
heißt Rang von f (über K).

Falls $\dim V < \infty$, so gilt wegen a)

$$\text{rank } f = \dim V - \dim \text{Ker } f$$

d) Bsp. [Fortsetzung zu 1c)]

Sei $V = K^n$ und $v_1, \dots, v_n \in V$.

Die Abb.

$$f: K^n \rightarrow K^n: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i$$

(ist linear.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ bijektiv} &\Leftrightarrow f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\} \\ &\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \text{ lin. unabh.} \\ &\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n) \text{ Basis von } V \end{aligned}$$

(3) Proposition: Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V und $f: V \rightarrow W$ eine lin. Abb. Es gilt:

- $\text{Lin}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \text{Im } f$
- $\text{rank } f = \max.$ Anzahl lin. unabh. Vektoren von $(f(v_1), \dots, f(v_n))$
- f surjektiv $\Leftrightarrow \text{rank } f = \dim W$
- f injektiv $\Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ lin. unabh.
- f bijektiv $\Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n))$ Basis von W

Bew: $\rightarrow \text{ÜA}$

(4) Satz: Seien V, W K -VR, (v_1, \dots, v_n) Basis von V und $w_1, \dots, w_n \in W$.

Dann ex. eindeutig bestimmte lin. Abb.

$f: V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i \quad \forall i$.

\leadsto [Hauptsatz über lin. Abb.]

Bew: Jeder Vektorraum V hat eindeutige Darstellung als $\sum \lambda_i v_i$

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

mit $\lambda_i \in K$.

Wir setzen $f(v) := \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$.

Wegen $v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$ ist $f(v_i) = w_i$. Offenbar ist f linear.

Hingegen, es ex. weitere lin. Abb. $g: V \rightarrow W$
mit $g(v_i) = w_i \quad \forall i$.

Dann gilt für beliebiges

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$g(v) = \sum \lambda_i g(v_i) = \sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i f(v_i) = f(v)$$

\uparrow linear \uparrow linear

$$\Rightarrow g = f$$

□

(5) Sei V ein K -VR mit $\dim V = n < \infty$.

Wähle Basis (v_1, \dots, v_n) von V . Der Standardvektorraum K^n hat (e_1, \dots, e_n) als Basis. Wegen (4) ex. eindeutig bestimmte lin. Abb. $f: K^n \rightarrow V$ mit $f(e_i) = v_i \quad \forall i$.

Wegen 3e) ist f bijektiv.

Def. Eine bijektive K -lineare Abb. heißt K -Vektorraum-Isomorphismus.

• Zwei K -Vektorräume V, W heißen isomorph, falls ein K -VR-Isomorphismus von V nach W existiert.

Bem. Wenn $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus ist, so ist die Umkehrabb. $f^{-1}: W \rightarrow V$ def. und ebenfalls bijektiv.

Aus (4) folgt, dass auch f^{-1} linear ist, also selbst wieder ein Isomorphismus.

Folgerung: Sei V ein n -dim. K -VR mit $n < \infty$.

Dann ist V isomorph zu K^n .

(7) a) Def.: Sei X eine Menge und $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
 Eine $m \times n$ Matrix M mit Koeffizienten in X
 ist eine Abb.

$$M: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow X.$$

b) Bsp.: Schwarz-Weiß-Bild $\leadsto m \times n$ Matrix mit Koeffizienten
 aus $\{0, 1\}$

c) Notation: Üblicherweise schreibt man eine Matrix
 $M: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ als rechteckiges
 Schema

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 M(1,1) & \dots & M(1,n) \\
 \vdots & & \vdots \\
 M(m,1) & \dots & M(m,n)
 \end{array} \\
 \left(\begin{array}{c}
 M(1,1) \quad \dots \quad M(1,n) \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 M(m,1) \quad \dots \quad M(m,n)
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

j-te Spalte

d) Seien V, W VR über K und $f: V \rightarrow W$ eine
 lineare Abb.

Seien $B = (v_1, \dots, v_m)$ und $C = (w_1, \dots, w_n)$
 Basen von V bzw. W .

Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ex. eindeutig bestimmte
 $\mu_{i1}, \dots, \mu_{in} \in K$ mit

$$f(v_i) = \mu_{i1} w_1 + \dots + \mu_{in} w_n$$

Def.: Die Matrix

$$M_{B,C}(f): \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow K$$

(i, j) $\mapsto \mu_{ij}$

heißt Matrix von f bzgl. B und C .

Ziel der VL: zu verstehen, inwiefern Matrizen
"dasselbe" wie lin. Abb. sind bzw. diese beschreiben

(8) "Strukturen" linearer Abb.

a) Die VR-Struktur auf der Menge der lin. Abb. $V \rightarrow W$

Def: Seien V und W K -VR.

$$\text{Hom}(V, W) = \{ \varphi: V \rightarrow W \mid \varphi \text{ linear} \}$$

Homomorphismen von V nach W

Prop.: $\text{Hom}(V, W)$ ist UVR des K -VR aller
Abb. von V nach W

Bew: zur Erinnerung die Verknüpfungen

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$$

$$(\lambda \varphi)(v) = \lambda \cdot \varphi(v)$$

Seien $\varphi, \psi: V \rightarrow W$ linear.

Z.z: $\varphi + \psi$ und $\lambda \cdot \varphi$ sind linear.

Rechnung: $a, b \in K, u, v \in V$

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(au + bv) &= \varphi(au + bv) + \psi(au + bv) \\ &= a\varphi(u) + b\varphi(v) + a\psi(u) + b\psi(v) \\ &= a(\varphi(u) + \psi(u)) + b(\varphi(v) + \psi(v)) \\ &= a \cdot (\varphi + \psi)(u) + b \cdot (\varphi + \psi)(v) \end{aligned}$$

u.s.w.

b) Komposition linearer Abb.

Prop: U, V, W K -VR

i) sind $\varphi: U \rightarrow V$ und $\psi: V \rightarrow W$ linear, so auch $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$.

ii) $\text{id}: V \rightarrow V$ ist linear.

iii) Ist $\varphi: U \rightarrow V$ bijektiv und linear, so ist auch φ^{-1} linear.

Bew: i) $\mathcal{T} \circ \varphi (au + bv) = \mathcal{T} (a\varphi(u) + b\varphi(v))$
 $= a \cdot \mathcal{T} \circ \varphi (u) + b \cdot \mathcal{T} \circ \varphi (v)$

ii) klar

iii) Nutze Bijektivität: $v_1 = \varphi(u_1)$, $v_2 = \varphi(u_2)$:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(av_1 + bv_2) &= \varphi^{-1} \circ \varphi (au_1 + bu_2) \\ &= au_1 + bu_2 \\ &= a\varphi^{-1}(v_1) + b\varphi^{-1}(v_2) // \end{aligned}$$

c) Zusammenspiel beider Verknüpfungstypen

Prop: Seien $\varphi_1, \varphi_2 : U \rightarrow V$ und
 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 : V \rightarrow W$ lineare Abb.

Dann gilt

- i) $\mathcal{T}_1 \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = \mathcal{T}_1 \circ \varphi_1 + \mathcal{T}_1 \circ \varphi_2$
- ii) $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \circ \varphi_1 = \mathcal{T}_1 \circ \varphi_1 + \mathcal{T}_2 \circ \varphi_1$
- iii) $(\lambda \mathcal{T}_1) \circ \varphi_1 = \lambda (\mathcal{T}_1 \circ \varphi_1) = \mathcal{T}_1 \circ (\lambda \varphi_1)$.

Bew: $\forall u \in U$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 \circ (\varphi_1 + \varphi_2)(u) &= \mathcal{T}_1(\varphi_1(u) + \varphi_2(u)) \\ &= \mathcal{T}_1 \circ \varphi_1(u) + \mathcal{T}_1 \circ \varphi_2(u) \end{aligned}$$

u.s.w.

Satz: $\text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$ ist mit den Verknüpfungen $(+, \circ)$ ein Ring mit 1.

Bew: - \circ assoziativ (immer)

- hat $\text{id} : V \rightarrow V$

- distributiv

Bem: Da noch iii) (Verträglichkeit mit Skalarmult.) gilt, ist $\text{End}(V)$ sogar eine K -Algebra.

d) Spezialfall: Satz: $\text{GL}(V) = \{\varphi : V \rightarrow V \mid \varphi \text{ linear und bijektiv}\}$ ist eine Gruppe. (General linear group)

(9) „Strukturen“ von Matrizen

a) Der VR der $m \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in K

Notation: geg $A: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow K$

$$(i, j) \mapsto a_{ij}$$

Schreibe $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$

Verknüpfungen: komponentenweise:

$$\text{Ist } A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(K),$$

$$\text{so } A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Bem: Dies entspricht der Standardaddition und Skalarmultiplikation der Abb. Daher ist $M_{m \times n}(K)$ ein K -VR.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Multiplikation von Matrizen

1. Spezialfall: Def: Man kann ein $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit einer $n \times 1$ Matrix $x = (x_{j1})$ (Spaltenvektor) multiplizieren und das Ergebnis ist die $m \times 1$ Matrix $y = (y_{i1})$ mit

$$y_{i1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{j1}, \quad i=1, \dots, m.$$

Erläuterung: Man kann damit das

$$\text{lineare GLS } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{in der Matrixform } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Merksatz: "Zeile mal Spalte"

2. Motivierender Einschluss: Lin. Abb. zu einer Matrix

$$A \in M_{m \times n}(K) \text{ gibt } \varphi_A: K^n \rightarrow K^m \\ x \mapsto Ax$$

Dabei sind die Bilder der Standardbasisvektoren die Spalten von A : $\varphi_A(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Komposition zweier solcher Abb. \rightarrow Produkt der Matrizen

$$\text{Sei also } \varphi = \varphi_A \circ \varphi_B, \varphi_B: K^k \rightarrow K^n, \varphi_A: K^n \rightarrow K^m.$$

Dann ist $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{n \times k}(K)$ und daher $AB \in M_{m \times k}(K)$

3. Definiere $C = AB$ durch $c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj}$

Bem! Fasst man B als nebeneinandergeschriebene Spaltenvektoren auf, so schreibt man die Ergebnisse ($A \cdot$ Spalte von B) nebeneinander.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_n$ heißt Einheitsmatrix E_n

c) Zusammenspiel beider Verknüpfungstypen

Proposition: Seien $A, A_1, A_2 \in M_{m \times n}(K)$
 $B, B_1, B_2 \in M_{n \times k}(K)$.

Dann gilt

i) $A \cdot (B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

ii) $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$

iii) $(\lambda A) \cdot B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

Satz: $M_n(K) := M_{n \times n}(K)$ ist mit den Verknüpfungen
 $(+, \cdot)$ ein Ring mit 1 und eine K -Algebra.

Bew:

- assoziativ
- E_n neutrales Element bzgl. \cdot
- distributiv

d) Spezialfall

Def: Eine Matrix A heißt invertierbar, falls eine Matrix A^{-1} existiert, so dass $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$.

Satz: $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$ ist eine Gruppe (General linear group).

Bsp: - Diagonalmatrizen mit von Null verschiedenen Diagonaleinträgen sind invertierbar

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- obere Dreiecksmatrizen mit von Null verschiedenen Diagonaleinträgen sind invertierbar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wdh: Die Matrix zu einer linearen Abb:

$$\varphi: V \rightarrow W$$

$$\{v_1, \dots, v_n\} \quad \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) & \dots & \varphi(v_n) \\ | & & | \\ | & & | \end{pmatrix}$$

In den Spalten stehen die Bilder der Basisvektoren v_1, \dots, v_n , d.h. ihre Koordinaten bzgl. der Basis von W .

Jetzt: Spezialfall $\varphi: K^n \rightarrow K^m$ mit Standardbasis. Dann sind die Koordinaten einfach die entsprechenden Zahlen

Bsp: $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

3x2 Matrix

$$\varphi = \varphi_A, \text{ denn } Ax = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

(10) Sei K ein Körper.

a) Def: $K^{m \times n} = M_{m \times n}(K)$

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n = K^{n \times 1}$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\Rightarrow \varphi_A: K^n \rightarrow K^m$$

$x \mapsto Ax$ ist lin. Abb.

b) Es gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\varphi_A(e_i) = Ae_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{mi} \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte von } A.$$

\Rightarrow Spalten von A = Bilder der Standardbasisvektoren unter der Abb. φ_A

c) $\text{Im } \varphi_A = \varphi_A(K^n) = \{b \in K^m \mid \exists x \in K^n: Ax = b\}$
 $= \text{lin}(\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_n))$

= Unterraum von K^m , der von den Spalten von A aufgespannt wird

=: Spaltenraum von A

Def: $\text{rank}_K A := \text{rank}_K \varphi_A = \dim_K \text{lin}(\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_n))$

heißt Rang der Matrix A (über K).

d) Rangberechnung

Bsp: Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3 \times 3}$.

Wende Gauß-Jordan-Elimination an
auf das GLS $Ax = 0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

lin. GLS in Zeilen-
stufenform hat Rang 2
vgl. 2.9c)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Analog gilt } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}_{\mathbb{F}_3} A = 2.$$

Satz: Der Rang einer Matrix A entspricht stets
dem Rang einer Zeilenstufenform aus dem
Gauß-Jordan-Alg. angewendet auf $Ax = 0$.

Beweisidee: Die elementaren Zeilenoperationen (E1)
(E2), (E3) verändern den Rang einer Matrix $A \in K^{m \times n}$
nicht

⌈ (E1) Addiere zu einer Zeile j das λ -fache
der Zeile i :

$$A' = L'A, \text{ wobei } L' = I_m + \lambda E_{ji} \in K^{m \times m}$$

$$\text{und } E_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} j\text{-te Zeile} \\ i\text{-te Spalte} \end{array} \quad i \neq j$$

e) Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$.

Def: Die Matrix

$$A^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n \times m}$$

heißt Transponierte von A

Proposition: Sei $A \in K^{l \times m}$, $B \in K^{m \times n}$.

$$\Rightarrow (AB)^{\text{tr}} = B^{\text{tr}} \cdot A^{\text{tr}}$$

Bew: $\bar{U}A$

Bem: Zeilenrang einer Matrix := # linear unabh. Zeilen

$$\Rightarrow \text{Zeilenrang von } A = \text{Rang von } A^{\text{tr}}$$

Folgerung: Für $A \in K^{m \times n}$ gilt: Zeilenrang von A
= Rang von A .

Bew: $\bar{U}A$

f) Proposition: Die Abb.

$$\Phi: K^{m \times n} \rightarrow \text{Hom}(K^n, K^m)$$

$$A \mapsto \varphi_A$$

ist ein linearer Isomorphismus.

Die Abb. Φ^{-1} ordnet einer linearen Abb. $\varphi: K^n \rightarrow K^m$
die Matrix $[\varphi]$ von φ bzgl. der Standardbasen
von K^n und K^m zu.

Bem: In (5) wurde gezeigt, dass die Umkehrabb. einer bijektiven linearen Abb. selbst wieder linear ist

$$\Rightarrow [\varphi + \psi] = [\varphi] + [\psi] \quad \forall \varphi, \psi \in \text{Hom}(K^m, K^n)$$

Folgerung: $\dim_K \text{Hom}(K^m, K^n) = m \cdot n$

g) Proposition

i) $\forall A \in K^{l \times m}, B \in K^{m \times n} : \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$

ii) $\forall \psi \in \text{Hom}(K^l, K^m), \varphi \in \text{Hom}(K^m, K^n) :$

$$[\varphi \circ \psi] = [\varphi] \cdot [\psi]$$

iii) Die Abbildung

$$\Phi: K^{n \times n} \rightarrow \text{End}(K^n)$$

$$A \mapsto \varphi_A$$

ist (ein K -VR-Isomorphismus und)
ein Ringisomorphismus [insgesamt:

Φ ist K -Algebra-Isomorphismus].

Bew i) $\forall x \in K^n : (\varphi_A \circ \varphi_B)(x) = \varphi_A(\varphi_B(x))$

$$= \varphi_A(Bx) = A(Bx) = (AB)(x)$$

$$= \varphi_{AB}(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$$

(11) a) Sei V ein K -VR mit $\dim V = n$ und sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V .

Dann lässt sich $v \in V$ eindeutig schreiben als $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$. Setze

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n \quad \text{Koordinatenvektor bzgl. } \mathcal{B}$$

Die Abb.

$$k_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n \\ v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

ist ein K -VR-Isomorphismus, weil das Bild von \mathcal{B} wegen $[b_i] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i$ eine Basis von K^n ist.

b) Seien V, W K -VR und $f: V \rightarrow W$ linear. Zu Basen $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ von V bzw. W ist

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} := M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} [f(v_1)]_{\mathcal{C}} & \dots & [f(v_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$$

die Matrix von f bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{C} .

c) Proposition:

Für alle $v \in V$ gilt

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = [f(v)]_{\mathcal{C}}$$

$$\Leftrightarrow (k_{\mathcal{C}} \circ f)(v) = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} (k_{\mathcal{B}}(v))$$

$$\Leftrightarrow [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [k_{\mathcal{C}} \circ f \circ k_{\mathcal{B}}^{-1}]$$

Bew: Da die beiden Abb. von V nach K^n :

$$v \mapsto [f]_e^{B_3} [v]_{B_3} \text{ und } v \mapsto [f(v)]_e$$

linear sind, genügt es, sie auf einer Basis zu vergleichen, z.B. B_3 :

$$\begin{aligned} [f]_e^{B_3} [b_i]_{B_3} &= [f]_e^{B_3} e_i = i\text{-te Spalte von } [f]_e^{B_3} \\ &= [f(b_i)]_e \end{aligned}$$

□

d) Für jede lin. Abb. $f: V \rightarrow W$ existiert zu geg. Basen B_3 und \mathcal{C} eine Matrix $[f]_e^{B_3}$. Wir def. die Abb.

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{C}}^{B_3} : \text{Hom}(V, W) &\rightarrow K^{m \times n} \\ f &\mapsto [f]_e^{B_3} \end{aligned}$$

analog zu 10.f).

Proposition

$\Phi_{\mathcal{C}}^{B_3} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow K^{m \times n}$ ist ein linearer Isomorphismus.

Bew: analog zu 10.f).

e) Proposition

Seien U, V, W K -VR mit Basen A, B_3 bzw. \mathcal{C} .

Für Abb. $g: U \rightarrow V$ und $f: V \rightarrow W$ gilt dann

$$[f \circ g]_{\mathcal{C}}^{A} = [f]_e^{B_3} [g]_{B_3}^A$$

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & W \\
 \downarrow k_A & \cong & \downarrow k_B & \cong & \downarrow k_C \\
 K^p & \xrightarrow{[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}} & K^n & \xrightarrow{[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}} & K^m
 \end{array}$$

ist kommutativ.

Bew:

$$\begin{aligned}
 [f \circ g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} &= [k_C \circ f \circ g \circ k_A^{-1}] \\
 &= [k_C \circ f \circ k_B^{-1} \circ k_B \circ g \circ k_A^{-1}] \\
 &= [k_C \circ f \circ k_B^{-1}] [k_B \circ g \circ k_A^{-1}] \\
 &= [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}
 \end{aligned}$$

□

(12) a) Seien $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ und $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ Basen des K -VR V .

Jedes $v \in V$ lässt sich ~~immer~~ bzgl. \mathcal{B} und bzgl. \mathcal{B}' darstellen:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

Z.B. für die Vektoren b'_1, \dots, b'_n :

$$[b'_i]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{ni} \end{pmatrix}, \quad [b'_i]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}$$

Es gilt

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} = [\text{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Transformationsmatrix des Basiswechsels von \mathcal{B}' nach \mathcal{B} .

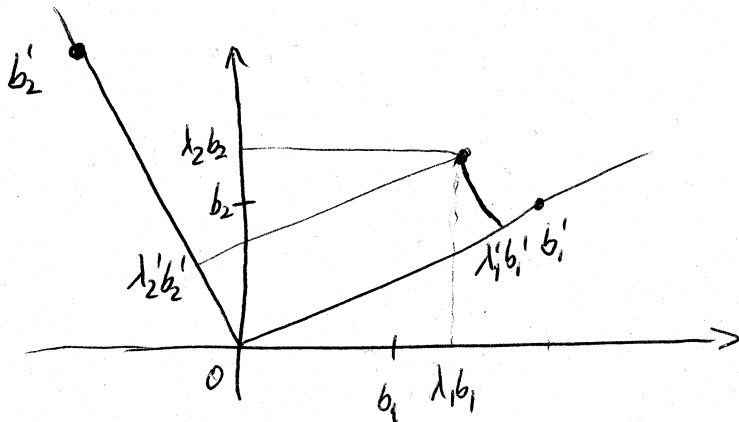
Die Spalten von S bilden eine Basis von V .
 $\Rightarrow S$ ist invertierbar und $S^{-1} = [\text{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

b) Bsp: $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1), (0))$ und $\mathcal{B}' = ((2), (-1))$.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_1' - \lambda_2' \\ \lambda_2 = \lambda_1' + 2\lambda_2' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1' = \frac{2}{5}\lambda_1 + \frac{1}{5}\lambda_2 \\ \lambda_2' = -\frac{1}{5}\lambda_1 + \frac{2}{5}\lambda_2 \end{cases}$$



c) Proposition

Sei $f: V \rightarrow W$ linear. Ferner seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W .
Setze $S = [\text{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ und $R = [\text{id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}$.

Dann gilt

$$[f]_{e'}^{ds'} = R^{-1} [f]_e^{ds} S$$

und

$$[f]_e^{ds} = R [f]_{e'}^{ds'} S^{-1}$$

Bew: folgt aus IIe)

□

(13) a) Betrachte das lin. GLS über dem Körper K :

$$(*) \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Wir fassen die Koeffizienten a_{ij} in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n} \text{ zusammen.}$$

$$\text{Ähnlich } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m.$$

Wenn wir die Unbestimmten x_1, \dots, x_n in einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ zusammenfassen, dann läßt sich (*) schreiben als $Ax = b$.

Das zugehörige homogene System ist

$$(**) Ax = 0$$

b) Die Lösungen von (**) bilden einen UVR U von K^n . Dabei ist $\dim U = n - \text{rank } A =: k$.

Eine Basis (u_1, \dots, u_k) von U heißt System von Fundamentallösungen von (**). Jede Lösung von (**) ist Linearkombination der Fundamentallösungen. (49)

c) Existenz von Lösungen

- Das homogene System (***) hat stets die triviale Lösung $x=0$.
- Das inhomogene System (*) hat mind. eine Lösung $\Leftrightarrow b \in \text{Spaltenraum von } A$
10c)
 $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$,

wobei

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times (n+1)}$$

d) Angenommen das inhomogene System (*) hat mindestens eine Lsg $x_0 \in K^n$

Dann ist

$$x_0 + U = \{x_0 + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \mid \lambda_i \in K\}$$

die Menge aller Lösungen von (*).

Def: Sei V ein K -VR, $U \leq V$, $x \in V$.

Dann heißt die Menge $x + U$ affiner Unterraum von V .

e) Sei nun $m=n$, d.h. $A \in K^{n \times n}$ ist quadratisch.

Proposition Äquivalent sind:

- Das lin. GLS $Ax=b$ hat eine eindeutige Lsg.
- A ist invertierbar
- $\text{rank}(A) = n$.

Bew: $Ax=b$ hat eindeutige Lsg

$$\Leftrightarrow \dim(\text{Lösungsraum}(Ax=0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi_A \text{ bijektiv} \Leftrightarrow \text{rank } A = n \Leftrightarrow A \text{ invertierbar}$$

Prop 3e)