Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09 17.12.2008

Höhere Mathematik I

Probeklausur mit Lösungshinweisen

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Fachrichtung: ______________________

Aufgabe	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	8	10	10	10	10	10	10	68	
err. Punktzahl									

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-***Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

(K 1) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 Punkte erhalten, wenn alle vier Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion.

(a)
- ☐ f ist streng monoton $\Rightarrow$ f ist surjektiv
- ☒ f ist streng monoton $\Rightarrow$ f ist injektiv
- ☐ f ist streng monoton $\Rightarrow$ f ist bijektiv
- ☐ f ist streng monoton $\Rightarrow$ f ist stetig

(b)
- ☐ f ist surektiv $\Rightarrow$ f ist streng monoton
- ☐ f ist injektiv $\Rightarrow$ f ist streng monoton
- ☐ f ist bijektiv $\Rightarrow$ f ist streng monoton
- ☐ f ist stetig $\Rightarrow$ f ist streng monoton

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge.

(c)
- ☒ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt
- ☒ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist ein Cauchy-Folge
- ☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist eine Nullfolge
- ☒ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow (b_n)$ mit $b_n = a_n^2$ ist konvergent

(d)
- ☐ (a_n) ist Beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent
- ☒ (a_n) ist ein Cauchy Folge $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent
- ☒ (a_n) ist eine Nullfolge $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent
- ☐ (b_n) mit $b_n = a_n^2$ ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent

(K 2) (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wann heißt f stetig in x_0? Geben Sie zwei Charakterisierungen an.

LÖSUNG:

Charakterisierung 1)

f heißt stetig in x_0 falls für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so das für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 - x| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. (Kann man auch so formulieren: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so das $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$).

Charakterisierung 2)

f heißt stetig in x_0 falls für jedes konvergente Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(K 3) (10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie falls existent den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{3n^3+2n+1}{n^5+n^4+n^3+n^2+1}$,

(b) $b_n = \frac{24n^2-1}{2n^2+5n}$,

(c) $c_n = 3^n$,

(d) $d_n = \sqrt{2n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$.

LÖSUNG:

(a)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{3n^3+2n+1}{n^5+n^4+n^3+n^2+1} = \frac{n^3\left(3+2n^{-2}+n^{-3}\right)}{n^5\left(1+n^{-1}+n^{-2}+n^{-3}+n^{-5}\right)} \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{\left(3+2n^{-2}+n^{-3}\right)}{\left(1+n^{-1}+n^{-2}+n^{-3}+n^{-5}\right)} \\
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3+2n^{-2}+n^{-3}\right)}{\left(1+n^{-1}+n^{-2}+n^{-3}+n^{-5}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{3+0+0}{1+0+0+0+0} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0.
\end{aligned}$$

Antwort: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b)

$$b_n = \frac{24n^2-1}{2n^2+5n} = \frac{n^2\left(24-n^{-2}\right)}{n^2\left(2+5n^{-1}\right)} = \frac{24-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{24}{2} = 12.$$

Antwort: $\lim_{n\to\infty} b_n = 12$.

(c) $c_n = 3^n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Antwort: c_n is divergient, d.h. die Grenzwert existiert nicht (ist unendlich).

(d)

$$\begin{aligned}
d_n &= \sqrt{2n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{2+n}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{2+n}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2n}\,(n+2-n)}{\left(\sqrt{2+n}+\sqrt{n}\right)} = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2+n}+\sqrt{n}} \\
&= 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\sqrt{1+2n^{-1}}} \\
&= 2\sqrt{2}\frac{1}{1+\sqrt{1+2n^{-1}}} \to_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Antwort: $\lim_{n\to\infty} d_n = \sqrt{2}$.

(K 4) (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

und zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 4\sqrt{k}}$$

konvergiert.

LÖSUNG:

(a) Die Partialsummen s_n von $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ sind durch $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ definiert. In dieses fall haben wir

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

und also gilt $s_n \to 1$ für $n \to \infty$. Es folgt daß die Reihe konvergiert und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} s_n = 1.$$

(b) Die Reihe zu untersuchen ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{k}{k^3+4\sqrt{k}}$. Es gilt daß $a_k = \frac{k}{k^3+4\sqrt{k}} = \frac{1}{k^2+4/\sqrt{k}} \leq \frac{1}{k^2} = b_k$ und wir wissen aus die Vorlesung daß $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Aus das Majorantkriterium folgt dann daß $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch konvergiert.

(K 5) (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Induktion, daß

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

für jede $n \geq 1$ gilt.

LÖSUNG:

Wir wollen Zeigen das die Aussage:

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

für jede $n \geq 1$ stimmt. Seien $L_n = \sum_{k=1}^{n} k$ und $R_n = \frac{n(n+1)}{2}$ die Linke bzw. Rechte seite von $A(n)$.

Induktionsanfang: $L_1 = \sum_{k=1}^{1} k = 1$ und $R_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \Rightarrow L_1 = R_1 \Rightarrow A(1)$ ist wahr.

Induktionsschritt: Nehme an daß $A(n)$ ist wahr, d.h. $L_n = \sum_{k=1}^{n} k = R_n$. Dann folgt daß

$$\begin{aligned} L_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + [n+1] = \\ &\quad \text{(benutze die Induktionsannahme: } L_n = R_n) \\ &= R_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)}{2}[n+2] \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = R_{n+1}. \end{aligned}$$

Also $A(n+1)$ ist auch war.

Wir haben gezeigt daß $A(1)$ ist wahr und falls $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr. Aus der Induktionsprinzip folgt daß $A(n)$ für jede $n \geq 1$ wahr ist. D.h.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ für jede } n \geq 1.$$

(K 6) (10 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x \sin \pi x + 3x - 1$ mindestens eine Nullstelle in $[0,1]$ hat.

LÖSUNG:

Es gilt $f(0) = -1$ $f(1) = 3 - 1 = 2$. Aus der Zwischenwertsatz folgt daß $f(x)$ jede wert zwischen -1 und 2 in der interval $[0,1]$ nehmen müß. Insbesondere müß f die Wert 0 in diese Intervall nehmen. D.h. $f(x_0) = 0$ für anmindestens ein $x_0 \in [0,1]$.

(K 7) (10 Punkte)

Sind folgende Funktionen surjektiv? Sind sie injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort! Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 4x + 1$,

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 4x + 1$,

(c) $g : \mathbb{Q} \cap [0,\infty) \to \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ mit $g(x) = x^2$,

(d) $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $g(x) = x^2$.

LÖSUNG:

(a) Falls $f(x) = f(x') \Rightarrow 4x + 1 = 4x' + 1 \Rightarrow x = x' \Rightarrow f$ ist injektiv. Und weil die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{4}$ ist für jede $y \in \mathbb{Q}$ definiert so ist f auch surjektiv. Also ist f bijektiv.

(b) Falls $f(x) = f(x') \Rightarrow 4x + 1 = 4x' + 1 \Rightarrow 4x = 4x' \Rightarrow x = x'$ so f ist injektiv. Aber weil $f(x) \equiv 1 \mod 4$ ist z.B. $y = 4$ nicht in der Bild von f und f ist damit nicht surjektiv. (Also f ist nicht bijektiv).

(c) Falls $g(x) = g(x') \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow \pm x = \pm x'$ aber x und x' sind beide $> 0 \Rightarrow x = x' \Rightarrow g$ ist injektiv. Aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 2$ ist nicht in der Bild von $g \Rightarrow g$ ist nicht surjektiv.

(d) Weil die umkehrfunktion $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ist für jede $y \in [0,\infty)$ definiert und $\sqrt{y} \in [0,\infty)$ folgt daß g ist bijektiv (also surjektiv und injektiv).