Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09 17.2.2009

Höhere Mathematik I

Probeklausur II mit Lösungshinweisen

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ________________

Vorname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Fachrichtung: ________________

Aufgabe	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	8	10	10	10	10	10	58	
err. Punktzahl								

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-***Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

(K 1) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 Punkte erhalten, wenn alle vier Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion.

(a) ☐ f ist stetig $\Rightarrow$ f ist differenzierbar
☒ f ist stetig $\Rightarrow$ f ist integrierbar
☐ f ist stetig $\Rightarrow$ f ist bijektiv
☒ f ist stetig $\Rightarrow$ f hat ein Stammfunktion

(b) ☒ f ist differenzierbar $\Rightarrow$ f ist integrierbar
☒ f ist differenzierbar $\Rightarrow$ f ist stetig
☐ f ist differenzierbar $\Rightarrow$ f ist injektiv
☒ f ist differenzierbar $\Rightarrow$ f hat ein Stammfunktion

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge.

(c) ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent
☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} (-1)^n a_n$ ist konvergent
☐ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent$\Rightarrow$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent
☒ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent $\Rightarrow$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

(d) ☐ (a_n) ist monoton steigend $\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent
☒ (a_n) ist monoton steigend und beschränkt$\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent
☐ (a_n) ist beschränkt$\Rightarrow$ (a_n) ist konvergent
☒ (a_n) ist konvergent$\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt

LÖSUNG:

Sehe Kreuzen oben. Die Falscheit/Wahrheit sind: F,W, F, W; W,W,F, W; F, F, F, W; F, W, F, W.

(K 2) (10 Punkte)

(a) Sei $y = 0.\overline{43}$. Schreiben Sie y als rationale Zahl in gekürzter Bruchdarstellung $y = \frac{p}{q}$. (5)

(b) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung (5)

$$w^4 - 16 = 0.$$

LÖSUNG:

(a) $1000y = 43.\overline{43} \Rightarrow 99y = 43.\overline{43} - 0.\overline{43} = 43 \Rightarrow y = \frac{43}{99}$.

(b) In Polarkoordinaten haben wir $w = re^{i\theta}$ und $16 = 16e^{0i}$ so die Gleichung ist $r^4 e^{4i\theta} = 16$ und wir bekommen zwei reelle Gleichungen $r^4 = 16$ und $4\theta = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Lösungen sind $z_n = 2e^{\frac{\pi n}{2} i}$. Es gibt vier unterschiedliche Lösungen in $\mathbb{C}$:

$$z_0 = 2, z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2} i} = 2i, z_2 = 2e^{\pi i} = -2, z_3 = 2e^{\frac{3\pi}{2} i} = -2i.$$

(K 3) (10 Punkte)

(a) Sei $a_n = \frac{3n^3+2n+5}{4n+2n^3+\frac{5}{n}}$. Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz und geben Sie falls existent den Grenzwert an. (2)

(b) Berechnen Sie den Grenzwert (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{4}}}$$

konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Reihe (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n+1)}$$

konvergiert.

LÖSUNG:

(a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n^3+2n+5}{4n+2n^3+\frac{5}{n}} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{3+2\frac{1}{n^2}+5\frac{1}{n^3}}{4\frac{1}{n^2}+2+\frac{5}{n^4}} \\ &= \frac{3+2\frac{1}{n^2}+5\frac{1}{n^3}}{4\frac{1}{n^2}+2+\frac{5}{n^4}} \to \frac{3+0+0}{0+2+0} = \frac{3}{2} \quad \text{für}\, n \to \infty. \end{aligned}$$

(b) Weil $\lim_{x\to 0} \cos^2 x - 1 = 0$ können wir die Grenzwert nicht direkt ausrechnen. Durch die L'hopital regel bekommen wir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(\cos^2 x - 1\right)}{\frac{d}{dx}(x^2)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \sin x}{2x} \\ &= -\lim_{x\to 0} \cos x \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= -1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\sin x}{\frac{d}{dx} x} \\ &= -\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = -1. \end{aligned}$$

N.B. in die erste version hat die Aufgabe eine $\cos x$ statt $\cos^2 x$ anthält. Die lösung ist ähnlich aber einfacher:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} &= \text{(L'hopital)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\
\text{(L'hopital)} &= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos x = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) Sei

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{4}}} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\
&= \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \le \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}.
\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert jetzt nach majorantenkriterium weil $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ ist konvergent.

(d) Sei $a_n = \frac{1}{(n-1)(n+1)}$ dann gilt $a_n = \frac{1}{n^2-1}$ und $(n+1)^2-1 = n^2+2n \ge n^2$ für $n \ge 1$ so $a_n$ist monoton fallend. Es folgt dann aus der Leibniz kriterium das

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n+1)}$$

ist konvergent.

(K 4) (10 Punkte)

Sei $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} -1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Seien $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Funktionen $f(x) = xH(x)$, $g(x) = x^2H(x)$ und $h(x) = H(x)H(1-x)$.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen H,f,g,h. (3)

(b) Geben Sie die Stellen an, an denen H,f,g,h nicht stetig ist. (3)

(c) Welche von der Funktionen H,f,g,h sind auf $\mathbb{R}$ stetig? (4)

LÖSUNG:

Die Funktionen sind $f(x) = |x|$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ -x^2, & x \le 0, \end{cases} \qquad \text{und } h(x) = \begin{cases} 1 \cdot -1 = -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 \cdot 1 = 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 1 \cdot -1 = -1, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Skizzieren einfach die obige Funktionen....

(b) H ist nicht im $x = 0$ stetig weil $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} H(x) = -1$ und $H(0) = 0$. h sind nicht im $x = 0$ stetig weil $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$ und $h(0) = 0$ (h ist auch nicht im $x = 1$ stetig). f und g sind offenbar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig weil x und x^2 stetig sind. Im punkt $x = 0$ gilt $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ und $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 0 = g(0)$. Es folgt das f und g sind beide auf $\mathbb{R}$ stetig.

(K 5) (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie die Ungleichung (4)

$$\ln x \le \sqrt{x} - 1, \quad x \ge 1.$$

(b) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^2 - 3\right) e^x$ alle lokale Extremstellen, sowie deren Typ. (4)

(c) Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen die obige Funktion f monoton steigend bzw. fallend ist. (2)

LÖSUNG:

(a) **Die Aufgabe (a) ist falsch** aber wir wollen trotz dem untersuchen was passiert (wenn es ein fehler in die richtige Klausur auftreten müß man natürlich nichts schrieben).

Sei $f(x) = \sqrt{x} - \ln x - 1$. Dann ist $f(1) = 0$, $f(2) = \sqrt{2} - 1 - \ln 2 \approx -0.27 < 0$ so die Aussage ist FALSCH. Wir können aber probieren ob es gibt eine x_0 so dass $\ln x \le \sqrt{x} - 1$ für $x \ge x_0$. Wir haben

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}\left(\sqrt{x} - 2\right)$$

und es ist klar das $f'(x) \ge 0$ fuer $\sqrt{x} \ge 2$ so f ist monoton wachsend auf $x \ge 4$. Aber $f(4) = 1 - \ln 2 < 0$ so die Ungleichung gilt nicht ab 4. Weil $f(4) < 0$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$müss es eine $x_0 > 4$ geben so dass $f(x_0) = 0$ ($x_0 \approx 12.34\ldots$) und für $x \ge x_0$ gilt die Ungleichung.

(b) $f(x) = \left(x^2 - 3\right) e^x$, $f'(x) = e^x \left(x^2 - 3 + 2x\right) = e^x \left((x+1)^2 - 4\right)$ und $f''(x) = e^x \left(x^2 - 1 + 4x\right)$.

So $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = -1 \pm 2 = 1, -3$. so $f''(1) = 4e$ und $f''(-3) = e^{-3}(9 - 1 - 12) = -4e^{-3}$.

Die lokale extremstellen von f sind also $x = 1$ (lokales minimum) und $x = -3$ (lokales maximum).

(c) Wir haben $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Also ist f monoton wachsend auf $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ und monoton fallend auf $(-3, 1)$.

(K 6) (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\, dx$, (2)

(b) $\int x \arctan(x)\, dx$. (3)

(c) Sei $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Berechnen Sie für $b > 0$ das Intgral

$$I_b = \int_1^b f(x)\, dx.$$

und geben Sie die geometrische interpretation von I_b an. (3)

(a) Berechnen Sie $I_\infty = \lim_{b\to\infty} I_b$. (2)

LÖSUNG:

(a) Weil $\frac{d}{dx} e^{\sin x} = \cos x e^{\sin x}$ haben wir

$$\int \cos x\, e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + C$$

für $C \in \mathbb{C}$.

(b) Für dieses Integral passt partielle integration:

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x dx &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1} dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} dx \\
&= \frac{1}{2}\arctan x \left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}x + C
\end{aligned}$$

für $C \in \mathbb{C}$.

(c) Sei $f: \mathbb{R}_{\geq 0} :\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ und berechnen Sie für $b > 0$ das Intgral x

$$I_b = \int_1^b \frac{1}{x^2+1} dx = [\arctan x]_1^b = \arctan b - \arctan 0 = \arctan b.$$

Die Geometrische interpretation ist das I_b die Fläche unter die Graf con $f(x)$ mit $0 \leq b$ ist.

(d)

$$I_\infty = \lim_{b\to\infty} I_b = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \arctan \infty = \frac{\pi}{2}.$$