Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09 2.2.2009

Höhere Mathematik I

Probeklausur A

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	8	10	10	10	10	10	58	
err. Punktzahl								

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-***Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

(K 1) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 Punkte erhalten, wenn alle vier Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion.

(a) ☐ f ist stetig $\Rightarrow f$ ist differenzierbar
☐ f ist stetig$\Rightarrow f$ ist integrierbar
☐ f ist stetig $\Rightarrow f$ ist bijektiv
☐ f ist stetig$\Rightarrow f$ hat ein Stammfunktion

(b) ☐ f ist differenzierbar$\Rightarrow f$ ist integrierbar
☐ f ist differenzierbar $\Rightarrow f$ ist stetig
☐ f ist differenzierbar $\Rightarrow f$ ist injektiv
☐ f ist differenzierbar $\Rightarrow f$ hat ein Stammfunktion

(c) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge.
☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent
☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (-1)^n a_n$ ist konvergent
☐ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent
☐ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

(d) ☐ (a_n) ist monoton steigend $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent
☐ (a_n) ist monoton steigend und Beschränkt$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent
☐ (a_n) ist beschränkt$\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent
☐ (a_n) ist konvergent$\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt

(K 2) (10 Punkte)

(a) Sei $y = 0.\overline{43}$. Schreib y als rationale Zahl, $y = \frac{p}{q}$ mit $(p,q) = 1$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen die Gleichung

$$w^4 - 16 = 0.$$

(K 3) (10 Punkte)

(a) Sei $a_n = \frac{3n^3+2n+5}{4n+2n^3+\frac{5}{n}}$. Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz und geben Sie falls existent den Grenzwert an.

(b) Berechnen Sie die Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{4}}}$$

konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n+1)}$$

konvergiert.

(K 4) (10 Punkte)

Sei $H, f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$f(x) = xH(x)$, $g(x) = x^2 H(x)$ und $h(x) = H(x)H(1-x)$ definiert.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen H, f, g, h.

(b) Welche von der Funktionen H, f, g, h sind auf $\mathbb{R}$ stetig?

(K 5) (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\ln x \leq \sqrt{x} - 1, \quad x \geq 1.$$

(b) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^2 - 3\right) e^x$ alle lokale Extremstellen, sowie deren Typ.

(c) Bestimmen Sie die Menge an welche die obige Funktion f monoton steigend bzw. fallend ist.

(K 6) (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$,

(b) $\int x \arctan x \, dx$.

(c) Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} :\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ und berechnen Sie für $b > 0$ das Intgral

$$I_b = \int_1^b f(x) \, dx.$$

und geben Sie die geometrische interpretation von I_b an.

(d) Berechnen Sie $I_\infty = \lim_{b \to \infty} I_b$. Was ist die geometrische interpretation von I_∞?