Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09 5.12.2008

Höhere Mathematik I

Probeklausur

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	8	10	10	10	10	10	10	68	
err. Punktzahl									

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-***Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

(K 1) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 Punkte erhalten, wenn alle vier Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion.

(a) ☐ f ist streng monoton $\Rightarrow f$ ist surjektiv
☐ f ist streng monoton $\Rightarrow f$ ist injektiv
☐ f ist streng monoton $\Rightarrow f$ ist bijektiv
☐ f ist streng monoton $\Rightarrow f$ ist stetig

(b) ☐ f ist surektiv $\Rightarrow f$ ist streng monoton
☐ f ist injektiv $\Rightarrow f$ ist streng monoton
☐ f ist bijektiv $\Rightarrow f$ ist streng monoton
☐ f ist stetig $\Rightarrow f$ ist streng monoton

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge.

(c) ☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt
☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow (a_n)$ ist ein Cauchy-Folge
☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow (a_n)$ ist eine Nullfolge
☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow (b_n)$ mit $b_n = a_n^2$ ist konvergent

(d) ☐ (a_n) ist Beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent
☐ (a_n) ist ein Cauchy Folge $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent
☐ (a_n) ist eine Nullfolge $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent
☐ (b_n) mit $b_n = a_n^2$ ist konvergent $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent

(K 2) (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wann heißt f stetig in x_0? Geben Sie zwei Charakterisierungen an.

(K 3) (10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie falls existent den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{3n^3+2n+1}{n^5+n^4+n^3+n^2+1}$,

(b) $b_n = \frac{24n^2-1}{2n^2+5n}$,

(c) $c_n = 3^n$,

(d) $d_n = \sqrt{2n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$.

(K 4) (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

und zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+4\sqrt{k}}$$

konvergiert.

(K 5) (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Induktion, daß

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

für jede $n \geq 1$ gilt.

(K 6) (10 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x \sin \pi x + 3x - 1$ mindestens eine Nullstelle in $[0,1]$ hat.

(K 7) (10 Punkte)

Sind folgende Funktionen surjektiv? Sind sie injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort! Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 4x+1$,

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 4x+1$,

(c) $g : \mathbb{Q} \cap [0,\infty) \to \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ mit $g(x) = x^2$,

(d) $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $g(x) = x^2$.