Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09 23.2.2009

Höhere Mathematik I

Klausur 17.02.09 mit Lösungshinweisen

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	8	10	10	10	10	10	58	
err. Punktzahl								

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-***Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

(K 1) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 Punkte erhalten, wenn alle vier Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion.

(a) ☐ f ist integrierbar $\Rightarrow$ f ist differenzierbar.
 ☐ f ist integrierbar $\Rightarrow$ f hat eine Stammfunktion.
 ☒ f ist stetig $\Rightarrow$ f ist integrierbar.
 ☐ f ist integrierbar $\Rightarrow$ f ist surjektiv.

(b) ☐ f hat eine Stammfunktion $\Rightarrow$ f ist integrierbar.
 ☒ f ist monoton $\Rightarrow$ f ist integrierbar.
 ☐ f ist integrierbar $\Rightarrow$ f ist stetig.
 ☒ f ist differenzierbar $\Rightarrow$ f ist integrierbar.

(c) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge.
 ☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.
 ☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.
 ☒ (a_n) ist monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.
 ☐ (a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.

(d) ☒ Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.
 ☐ Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \infty$.
 ☐ Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 1$.
 ☒ Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$.

LÖSUNG:

Die Falscheit/Wahrheit sind: F,F,W,F; F,W,F,W; F, F, W, F; W, F, F, W.

(K 2) (10 Punkte)

(a) Sei $y = 0.\overline{35}$. Schreiben Sie y als rationale Zahl in gekürzter Bruchdarstellung $y = \frac{p}{q}$. (5)

(b) Bestimmen sie die Lösungen der Gleichung (5)

$$z^3 - 27 = 0.$$

LÖSUNG:

(a) $100y = 35.\overline{35} \Rightarrow 99y = 35.\overline{35} - 0.\overline{35} = 35 \Rightarrow y = \frac{35}{99}$. Es gilt $35 = 7 \cdot 5$ und $99 = 3^2 \cdot 11$, somit gilt: $\operatorname{ggT}(35, 99) = 1$.

(b) In Polarkoordinaten haben wir $z = re^{i\theta}$ und $27 = 27e^{0i}$, somit lautet die Gleichung in Polarkoordinaten

$$r^3 e^{3i\theta} = 27.$$

Aus dieser komplexen Gleichung bekommen wir zwei reelle Gleichungen: $r^3 = 27$ und $3i\theta = 0 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Lösungen sind $r = 3$ und $\theta_n = \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. Aber es gibt nur drei unterschiedliche Lösungen in $\mathbb{C}$:

$$z_0 = 3,\, z_1 = 3e^{\frac{2\pi}{3}i},\, z_2 = 3e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

(K 3) (10 Punkte)

(a) Sei $a_n = (-1)^n n^{(-1)^n}$. Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz und geben Sie falls existent den Grenzwert an. (2)

(b) Berechnen Sie den Grenzwert (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe (3)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n\cos(n\pi)}$$

konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Reihe (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+1}$$

konvergiert.

LÖSUNG:

(a) Es ist klar, dass für ungerade n gilt $a_n = -\frac{1}{n}$. Für gerade n $a_n = n$ gilt. Es gilt $a_{2n+1} \to 0$ und $a_{2n} \to \infty$ für $n \to \infty$ und damit ist die Folge a_n nicht konvergent.

(b) Wir können $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ mit Hilfe der Regel von L'Hospital berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\tan x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

(c) Man zeigt, dass $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{1}{n^3 + n\cos(n\pi)}$ konvergiert mit Hilfe des Majorantenkriteriums: Es gilt $a_n \le \frac{1}{n^3 - n} \le \frac{1}{n^2}$ für $n \ge 2$ und $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. Damit folgt, dass $\sum_{n\ge 1} a_n$ konvergiert.

(d) Man zeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums: $\frac{1}{n+1}$ ist eine monoton fallende Nullfolge und daraus folgt, dass die Summe $\sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergiert.

(K 4) (10 Punkte)

Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} -2, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

Seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen $f(x) = xH(x)$, $g(x) = x^2 H(x)$ und $h(x) = H(x)H(1-x)$.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen H, f, g, h. (3)

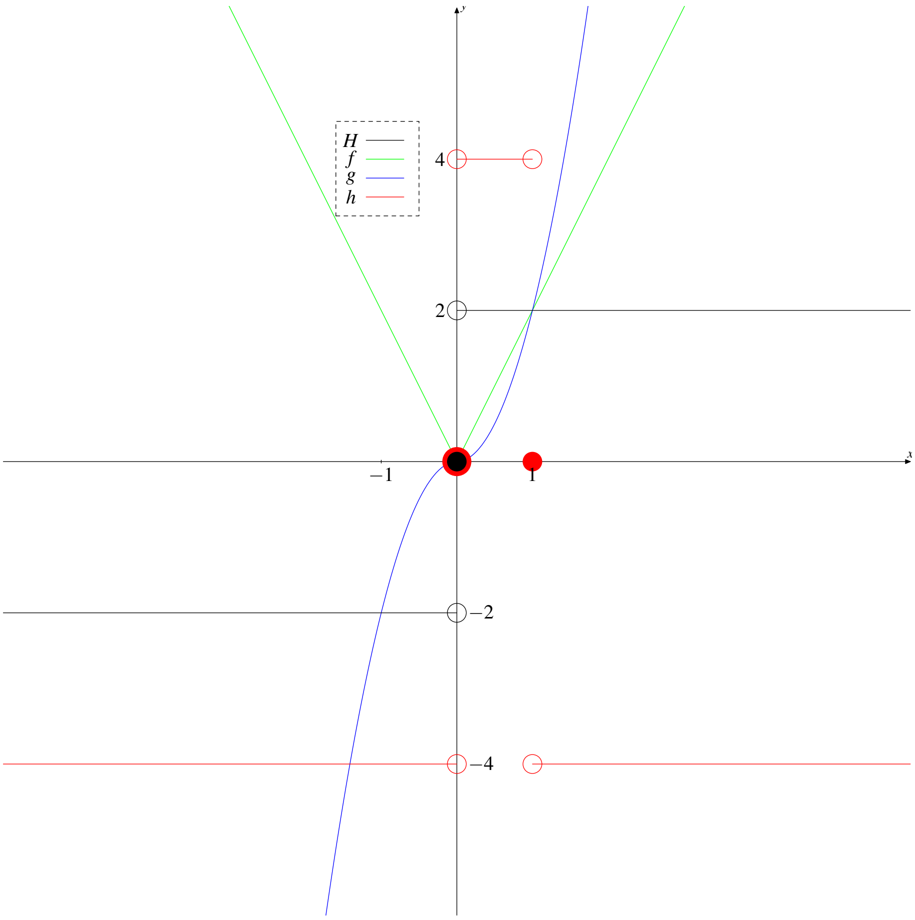
(b) Geben Sie die Stellen an, an denen H, f, g, h nicht differenzierbar ist. (4)

(c) Welche der Funktionen H, f, g, h sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? (3)

LÖSUNG:

Die Funktionen sind $f(x) = 2|x|$,

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2, & x > 0, \\ -2x^2, & x \leq 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 2 \cdot -2 = -4, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2 \cdot 2 = 4, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 2 \cdot -2 = -4, & x > 1. \end{cases}$$



(a)

(b) Es ist klar, dass H auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist und dass H in $x_0 = 0$ nicht stetig ist, weil $\lim_{x\to 0^-} H(x) = -2 \neq 2 = \lim_{x\to 0^+} H(x)$.

Es ist auch klar, dass h auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ stetig ist und dass h in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ nicht stetig ist, weil $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -4 \neq 4 = \lim_{x\to 0^+} h(x)$ und $\lim_{x\to 1^-} h(x) = 4 \neq -4 = \lim_{x\to 1^+} h(x)$.

Aus der Vorlesung oder direkt aus der Definition sieht man, dass $f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Es ist auch klar, dass $g(x)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist. Aber $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} -2x^2 = 0 = \lim_{x\to 0^+} 2x^2 = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$, somit ist g auch in $x_0 = 0$ stetig und damit auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(c) Aus (b) folgt, dass H in $x_0 = 0$ und h in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ nicht differenzierbar sind.

Die Funktion $f(x) = 2|x|$ ist auch nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar weil

$$\frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \frac{2|\varepsilon|}{\varepsilon} = 2\mathrm{sign}(\varepsilon) = \begin{cases} -2, & \varepsilon < 0 \\ 2, & \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Daher ist $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} = 2 \neq \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} = -2$ und der Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon}$ existiert nicht. Es ist klar, dass g auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und im Punkt $x_0 = 0$ haben wir

$$g'(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(x_0+\varepsilon) - g(x_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon} = 2 \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon = 0,$$

also ist g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(K 5) (10 Punkte)

(a) Geben Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 in $x_0 = 0$ für $g(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ an. (4P)

(b) Zeigen Sie, das unter allen Rechtecken mit vorgegebenem Umfang U das Quadrat die größte Fläche besitzt. (6P)

LÖSUNG:

(a) Wir haben $\frac{d}{dx}\frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$. Also gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\frac{x}{x-1}} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right) = e^{\frac{x}{x-1}}\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right), \\ g''(x) &= e^{\frac{x}{x-1}}\left(\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{2}{(x-1)^3}\right). \end{aligned}$$

Folglich ist $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$, $g''(0) = 1(1-2) = -1$. Also ist das Taylorpolynom vom Grad 2

$$T_2(x,0) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2.$$

(b) Sei K ein Rechteck mit Seiten $x, y \geq 0$. Dann ist die Fläche $A = xy$ und der Umfang ist $U = 2x + 2y$. Falls U konstant ist gilt $y = \frac{1}{2}(U - 2x)$, und die Fläche kann als Funktion von x

$$A(x) = xy = \frac{1}{2}x(U - 2x) = \frac{U}{2}x - x^2$$

ausgedrückt werden. Wir wollen diese Funktion maximieren. Da $A'(x) = \frac{U}{2} - 2x$ und $A''(x) = -1$, ist der einzige lokale Extrempunkt $x = \frac{U}{4}$, und das ist ein Maximum. Weil $A(x) \geq 0$ ist es klar, dass $0 \leq x \leq U$ und für die Randpunkte $x = 0$ und $x = U$ gilt $A(0) = A(U) = 0$.

Es folgt, dass der Punkt $x = \frac{U}{4}$ ein globales Maximum ist. Für $x = \frac{U}{4}$ gilt $y = \frac{U}{4} = x$, also wird die maximale Fläche für ein Quadrat angenomen.

(K 6) (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int x^2 e^{-x^3}\, dx$, (2)

(b) $\int x^2 \sin(x)\, dx$, (3)

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$, (2)

(d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+18}\, dx$. (3)

LÖSUNG:

(a) Weil $\frac{d}{dx}\left(e^{-x^3}\right) = -3x^2 e^{-x^3}$, haben wir $\int x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$, für $C \in \mathbb{C}$.

(b) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C
\end{aligned}$$

für $C \in \mathbb{C}$.

(c) Weil $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$, haben wir

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \sqrt{1-\frac{1}{4}} = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

(d) Wir können schreiben $x^2 + 6x + 18 = (x+3)^2 + 9$, also gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+18} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2+9} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x+3}{3}\right)^2 + 1} dx \\
\left\{ t = \frac{x+3}{3}, dx = 3dt \right\} &= \frac{1}{3} \int_1^{\frac{4}{3}} \frac{1}{t^2+1} dt \\
&= \frac{1}{3} [\arctan t]_1^{\frac{4}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \left(\arctan \frac{4}{3} - \arctan 1 \right).
\end{aligned}$$