Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2008/09 21.2.2009

Höhere Mathematik I

Klausur 17.02.09

Bitte alle Blätter mit Namen versehen, fortlaufend numerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Gesamt	Note
mögl. Punktzahl	8	10	10	10	10	10	58	
err. Punktzahl								

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4-***Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

(K 1) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 Punkte erhalten, wenn alle vier Kästchen richtig beantwortet sind. Für jede falsche Antwort erhalten Sie einen Punkt abzug. Sie können minimal 0 Punkte erhalten.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Funktion.

(a)
- ☐ f ist integrierbar $\Rightarrow$ f ist differenzierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Rightarrow$ f hat eine Stammfunktion.
- ☐ f ist stetig $\Rightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Rightarrow$ f ist surjektiv.

(b)
- ☐ f hat eine Stammfunktion $\Rightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist monoton $\Rightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Rightarrow$ f ist stetig.
- ☐ f ist differenzierbar $\Rightarrow$ f ist integrierbar.

(c) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge.
- ☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.
- ☐ (a_n) ist konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.
- ☐ (a_n) ist monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.
- ☐ (a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.

(d)
- ☐ Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.
- ☐ Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \infty$.
- ☐ Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 1$.
- ☐ Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$.

(K 2) (10 Punkte)

(a) Sei $y = 0.\overline{35}$. Schreiben Sie y als rationale Zahl in gekürzter Bruchdarstellung $y = \frac{p}{q}$. (5)

(b) Bestimmen sie die Lösungen der Gleichung (5)

$$z^3 - 27 = 0.$$

(K 3) (10 Punkte)

(a) Sei $a_n = (-1)^n n^{(-1)^n}$. Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz und geben Sie falls existent den Grenzwert an. (2)

(b) Berechnen Sie den Grenzwert (2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe (3)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n\cos(n\pi)}$$

konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Reihe (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+1}$$

konvergiert.

(K 4) (10 Punkte)

Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} -2, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

Seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen $f(x) = xH(x)$, $g(x) = x^2 H(x)$ und $h(x) = H(x)H(1-x)$.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen H, f, g, h. (3)

(b) Geben Sie die Stellen an, an denen H, f, g, h nicht differenzierbar ist. (4)

(c) Welche der Funktionen H, f, g, h sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? (3)

(K 5) (10 Punkte)

(a) Geben Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 in $x_0 = 0$ für $g(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ an. (4P)

(b) Zeigen Sie, das unter allen Rechtecken mit vorgegebenem Umfang U das Quadrat die größte Fläche besitzt. (6P)

(K 6) (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int x^2 e^{-x^3}\, dx$, (2)

(b) $\int x^2 \sin(x)\, dx$, (3)

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$, (2)

(d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+18}\, dx$. (3)