18. Polynominterpolation

- Gegeben: Daten $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ für $i = 0, \ldots, n$ mit paarweise verschiedenen $x_0, \ldots, x_n$
- Gesucht: Polynom f mit:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} : f(x_i) = y_i \tag{1}$$

- Beispiel:

n	f
0	$f(x) = y_0$
1	$f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + y_0$

Ansatz für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \ldots + \alpha_n(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

Interpolationsbedingung (1) bestimmt $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ wie folgt:

1. Einsetzen von x_0:

$$\alpha_0 = y_0 \qquad \text{(Einsetzen von } x_0\text{)}$$

2. Lösen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 \underbrace{(x_1 - x_0)}_{\neq 0} &= y_1 \\ &\vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1(x_n - x_0) + \ldots + \\ \alpha_n \underbrace{(x_n - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1})}_{\neq 0} &= y_n \end{aligned}$$

Das so bestimmte Polynom besitzt Grad $\leq n$ und erfüllt (1). Ferner folgt aus dem Hauptsatz der Algebra: es existiert höchstens ein Polynom f vom Grad $\leq n$, das (1) erfüllt.

Fazit: es existiert genau ein Polynom f vom Grad $\leq n$, welches

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} : f(x_i) = y_i \tag{1}$$

erfüllt.

Beispiel:

4 Datenpaare, $n = 3$

i	x_i	y_i
0	0	-2
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
2	1	0
3	2	1

$$\alpha_0 = y_0 = -2$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) = y_1 \\
\Leftrightarrow \quad & -2 + \alpha_1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha_1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) = y_2 \\
\Leftrightarrow \quad & -2 + 1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha_2 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_0 + \alpha_1(x_3 - x_0) + \alpha_2(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) + \\
& \alpha_3(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) = y_3 \\
\Leftrightarrow \quad & -2 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} + \alpha_3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha_3 = -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Interpolationspolynom:

$$f(x) = -2 + x + 2x(x - \frac{1}{2}) - \frac{5}{3}x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$$