Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
8.2.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6. Übung zu Funktionentheorie II

Aufgabe 33 – Rechteckige und rhombische Gitter:

Ein Gitter L heißt *spiegelsymmetrisch*, wenn gilt: $\omega \in L \Leftrightarrow \overline{\omega} \in L$.

a) Zeige: Rechteckige und rhombische Gitter sind spiegelsymmetrisch. Dabei heisst L *rechteckig*, wenn $L = \mathbb{Z}\omega_1 + i\mathbb{Z}\omega_2'$ mit $\omega_1, \omega_2' \in \mathbb{R}$, und *rhombisch* wenn gilt $L = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\overline{\omega}$ mit $\omega \notin \mathbb{R}$ (Bild!).

b) Sei L_0 die von reellen und rein imaginären Vektoren in L erzeugte Untergruppe. Zeige: Ist L spiegelsymmetrisch, so ist $L_0 \subset L$ ein Gitter.

c) Zeige nun die Umkehrung von a): Ein spiegelsymmetrisches Gitter ist rechteckig oder rhombisch.
Tipp: Im Fall $L \neq L_0 = \mathbb{Z}\omega_1 + i\mathbb{Z}\omega_2'$ zeige, dass für $\omega \in (L \setminus L_0) \cap P$ gilt $2\omega = \omega_1 + i\omega_2'$.

Aufgabe 34 – Spiegelsymmetrische Funktionen:

Eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ heißt *spiegelsymmetrisch*, wenn $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Ein Paar von Spiegelpunkten im Urbild besitzt also Bildpunkte, die durch Spiegelung auseinander hervorgehen.

a) Prüfe, welche holomorphen Funktionen spiegelsymmetrisch sind: Polynome, exp, sin, cos, ... (Vermutung dazu und Beweis?)

b) Zeige: Spiegelsymmetrische Funktionen nehmen auf $\mathbb{R}$ reelle Werte an. Auf $i\mathbb{R}$ nehmen die geraden spiegelsymmetrischen Funktionen reelle Werte an.

c) Zeige: Die $\wp$-Funktion ist genau dann spiegelsymmetrisch, wenn das Gitter L spiegelsymmetrisch ist.
Tipp: Für die eine Richtung hilft die Betrachtung der Polstellenmenge von $\wp$.

Aufgabe 35 – Abbildungsverhalten der $\wp$-Funktion für Rechtecksgitter:

Es sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 + i\mathbb{Z}\omega_2'$ ein rechteckiges Gitter und $Q := \{s\omega_1 + it\omega_2' \colon 0 < s, t < 1/2\}$ ein Viertel des Periodenparallelogramms. Weisen Sie die folgenden Behauptungen nach:

a) Auf den Mittellinien des Parallelogramms ist $\wp$ reellwertig, d.h. es gilt $\wp(x + i\omega_2') \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\wp(iy + \omega_1/2) \in \mathbb{R}$ für $y \in \mathbb{R}$.

b) Umrunden wir von 0 aus den Rand ∂Q, so durchlaufen die Bildwerte monoton die ganze reelle Achse.
Tipp: Wo liegen die Verzweigungspunkte (oder kritischen Punkte) von $\wp$?

c) Läuft man von 0 aus entgegen dem Uhrzeiger durch ∂Q, so läuft das Bild von ∞ bis $-\infty$.
Tipp: Betrachte den Term $1/z^2$ um 0.

d) Zeige: Innerhalb von Q nimmt $\wp$ jeden Wert der unteren Halbebene $-H$ genau einmal an, d.h. $\wp \colon Q \to -H$ ist biholomorph. Markiere in P, ob die Werte in H oder in $-H$ liegen. Erläutere das Ergebnis aus der Perspektive des Riemannschen Abbildungssatzes.

Bemerkung: Das Vorgehen dieser Aufgabe läßt sich umdrehen: Man konstruiert zuerst eine Abbildung $Q \to -H$ mit dem Riemannschen Abbildungssatz und setzt die erhaltene Abbildung dann mit dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip glatt über die Ränder fort. Dies liefert eine doppelt periodische Funktion. Tatsächlich läßt sich so die $\wp$-Funktion für alle rechteckigen Tori rekonstruieren. Siehe Fischer-Lieb, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, S. 242 f oder mein Minimalflächenskript, Teil 4 Kapitel 2.4.

Aufgabe 36 – Eine einfache elliptische Funktion:

Wir konstruieren eine elliptische Funktion f mit zwei einfachen Polen als Singularitäten. Am einfachsten legt man die Pole in die Punkte $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und $L + (\omega_1 + \omega_2)/2$.

a) Wohin würde man die Nullstellen von f legen? Gibt es weitere Möglichkeiten?

b) Nehmen wir zusätzlich an, dass L rechteckig ist. Wie kann man f durch $\wp$ und $\wp'$ darstellen?

Aufgabe 37 – Wiederholungsfragen zum letzten Teil der Vorlesung:

Elliptische Funktionen:

- Definiere Gitter und elliptische Funktionen.
- Welchen Einschränkungen genügen die Positionen von Null- und Polstellen?
- Was ist die Ordnung einer elliptischen Funktion? Sind alle Ordnungen möglich?
- Welche Eigenschaften charakterisieren die $\wp$-Funktion?
- Warum sind beliebige elliptische Funktionen als rationale Funktionen in $\wp$ und $\wp'$ darstellbar? Wann speziell sogar als Polynom in $\wp$?
- Warum erfüllt $\wp'^2$ eine Differentialgleichung und welche Konsequenzen kann man daraus ziehen?