Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
16.1.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 5. Übung zu Funktionentheorie II

**Aufgabe 27 – Gitter:**

a) Entscheide: Ist $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $a, b \in \mathbb{C}$, so ist auch $aL$ und $L + b$ ein Gitter.
b) Sei $L$ ein Gitter. Gib echte Teilmengen von $L$ an, die ebenfalls Gitter sind.
c) Seien $L$ und $M$ Gitter. Sind dann $L \cup M$ und $L \cap M$ Gitter?

**Aufgabe 28 – Eine ebene kristallographische Gruppe:**

a) Wie sieht das Periodenparallelogramm eines Gitters $L \subset \mathbb{C}$ aus, das durch die Kanten eines gleichseitigen Dreiecks aufgespannt wird?
b) Beschreibe sämtliche Drehungen und sämtliche Spiegelungen, die das Gitter $L$ in sich abbilden. Trage dazu am einfachsten Fixpunkte und Ordnung der Drehung in das Parallelogramm ein, bzw. die Achse der Spiegelungen.

**Aufgabe 29 – Vierfarbensatz auf dem Torus?:**

Betrachte eine Pflasterung der Ebene mit regelmäßigen Sechsecken. Passendes Sechseckspapier wird dazu gestellt. Finde ein Gitter, so dass a) sieben Sechsecke einen Fundamentalbereich bilden. Das heißt also, dass sich das Periodenparallelogramm aus sieben, teils zerschnittenen, Sechsecken zusammensetzt. Weiter verlangen wir, dass b) jedes Sechseck im Fundamentalbereich jedes andere in (genau) einer Kante berührt.
Wie viele Farben braucht man also mindestens, um Karten auf dem Torus so einzufärben, dass Polygone, die Kanten gemeinsam haben, verschieden gefärbt sind?

**Aufgabe 30 – Identifizierung von Polygonkanten:**

a) Betrachte ein gleichseitiges Polygon mit $2k$ Kanten. Es ist von sinnvoll eine Ecke in den Ursprung zu legen. Gibt es außer dem Quadratfall $k = 2$ noch ein weiteres $k > 2$, so dass das Identifizieren gegenüberliegender Kanten ein Gitter erzeugt?
b) Man kann auch kompakte Flächen von höherem Geschlecht $g$ durch Identifikation der Kanten eines Polygons erzeugen. Bestimme z.B. für $g = 2$ ein Polygon und seine Seitenidentifizierungen.
*Tipp*: Eine Möglichkeit ist, eine symmetrische Version der Fläche in vier Sechsecke zu zerlegen. Alle benötigten Randkurven liegen in Symmetrieebenen der Fläche.

**Aufgabe 31 – Reihenkonvergenz:**

Zeige durch Integralvergleich: Die Reihe

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{(m^2 + n^2)^s}$$

konvergiert für $s > 1$.

**Aufgabe 32 – Diskrete Untergruppen der additiven Gruppe:**

Beweise: Jede diskrete Untergruppe $L$ von $(\mathbb{R}^n, +)$ ist von der Form

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_k$$

mit $0 \leq k \leq n$ und $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängigen Vektoren.

## Aufgabe 33 – Wiederholungsfragen zum ersten Teil der Vorlesung:

a) Konforme Abbildungen:
- Definiere konforme Abbildungen und gib interessante Beispiele in Dimension 2 und $n > 2$ an.
- Gib die folgenden Automorphismengruppen an (wenn möglich mit Begründung): $\operatorname{Aut}\mathbb{C}$, $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$, $\operatorname{Aut} D$.
- Gib drei nicht konform äquivalente Gebiete in $\mathbb{C}$ an.

b) Riemannscher Abbildungssatz:
- Formuliere den Satz.
- Warum ist er wichtig?
- Gilt in höherer Dimension eine entsprechende Aussage?
- Wie wird die Eindeutigkeitsaussage gezeigt?
- Welche Bedingung muss man an eine Folge holomorpher Funktionen $(f_n)$ stellen, damit eine Teilfolge konvergiert? Begründe, warum die Teilfolge dann konvergiert. Warum konvergieren auch die Ableitungen?

c) Partialbruch- und Produktentwicklungen:
- Was kann man vorschreiben, wenn man Funktionen mit unendlich vielen Singularitäten konstruieren möchte?
- Was sind und wie "funktionieren" konvergenzerzeugende Summanden?
- Wann heißt ein unendliches Produkt $\prod b_n$ absolut konvergent?
- Ist eine Partialbruch- bzw. eine Produktentwicklung eindeutig durch eine Hauptverteilung bzw. Nullstellenverteilung bestimmt?
- Mit welchem Ansatz haben wir die Gamma-Funktion konstruiert?